

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## ریاضی و آمار (۲)

رشته های ادبیات و علوم انسانی – علوم و معارف اسلامی

راهنمای معلم

پایه یازدهم  
دوره دوم متوسطه

دانلود سوالات آزمون

راهنمای کامل آزمون



وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب:

راهنمای معلم ریاضی و آمار (۲) پایه یازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۱۳۶۳

پدیدآورنده:

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:

حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، ناصر بروجردیان، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)  
حمیدرضا امیری، آزاده حسین‌فرزان، عادل محمدپور، هادی مین‌باشیان، حسین میرزایی و فربا جباری (اعضای گروه تألیف)

مدیریت آماده‌سازی هنری:

اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسه افزوده آماده‌سازی:

لیدانیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - زهره بهشتی‌شیرازی (صفحه‌آرا) - فاطمه رئیس‌یان‌فیروزآباد (رسم) - زینت بهشتی‌شیرازی، سوروش سعادت‌مندی، حسین چراغی، علیرضا ملکان و ناهید خیام‌باشی (امور آماده‌سازی)

نشانی سازمان:

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبگاه: [www.chap.sch.ir](http://www.chap.sch.ir) و [www.irtextbook.ir](http://www.irtextbook.ir)

ناشر:

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹

چاپخانه:

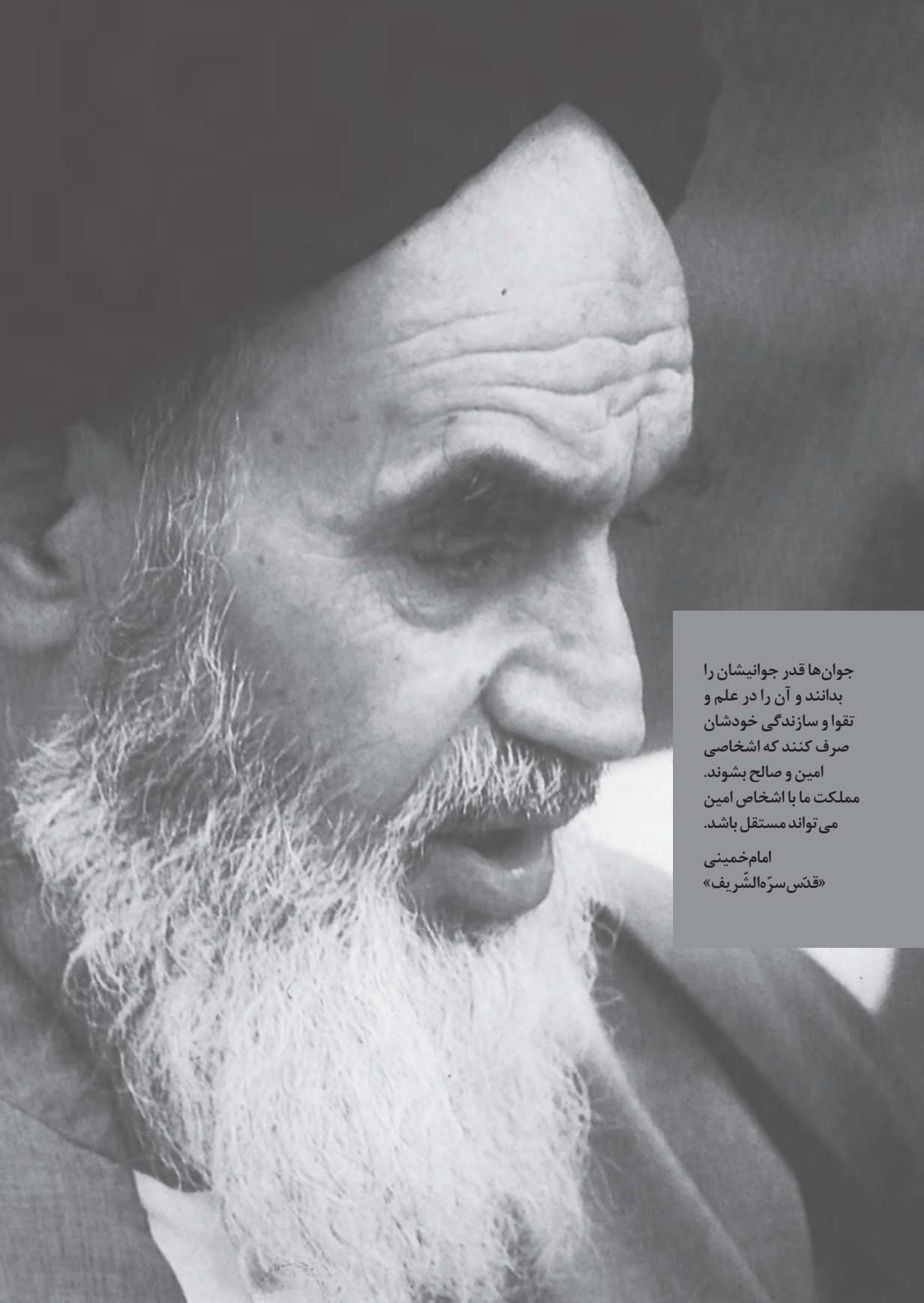
شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ:

چاپ اول ۱۳۹۶

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵۳۰۰۳-۰

ISBN: 978-964-05-3003-0



جوان‌ها قدر جوانیشان را  
بدانند و آن را در علم و  
تقوا و سازندگی خودشان  
صرف کنند که اشخاصی  
امین و صالح بشوند.  
مملکت ما با اشخاص امین  
می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی  
«قدس سره الشریف»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

# فهرست مطالب

مقدمه (سخنی با معلم)

## فصل ۱: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

نگاه کلی به فصل	۲
نقشه مفهومی فصل اول	۳
دانستنی‌های معلم	۳
نمونه سؤال‌های ارزشیابی	۵
درس اول: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها	۹
اهداف درس اول	۹
روش تدریس	۹
توصیه آموزشی	۱۲
اشتباهات رایج دانش‌آموزان	۱۲
حل تمرینات برگزیده درس اول (صفحه ۱۰ کتاب)	۱۳
درس دوم: استدلال ریاضی	۱۶
اهداف درس دوم	۱۶
روش تدریس	۱۶
پاسخ تمرین‌های برگزیده	۱۸
نمونه سؤالات ارزشیابی	۱۹

## فصل ۲: تابع

نگاه کلی به فصل	۲۲
اهداف کلی	۲۲
نقشه مفهومی	۲۳
دانستنی‌های معلم	۲۴
نمونه سؤال‌های ارزشیابی	۲۵
درس اول: توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی	۳۴
اهداف درس اول	۳۴
روش تدریس	۳۴
توصیه آموزشی	۳۶

۳۶	اشتباهات رایج دانش آموزان
۳۷	درس دوم : توابع پلکانی و قدر مطلق
۳۷	اهداف درس دوم
۳۷	روش تدریس
۴۰	توصیه آموزشی
۴۰	اشتباهات رایج دانش آموزان
۴۱	درس سوم : اعمال بر روی توابع
۴۱	اهداف درس سوم
۴۱	روش تدریس
۴۴	توصیه آموزشی
۴۴	اشتباهات رایج دانش آموزان
۴۵	حل تمرینات برگزیده درس اول (صفحه ۳۱ کتاب)
۴۸	حل تمرینات برگزیده درس دوم (صفحه ۴۳ کتاب)
۵۱	حل تمرینات برگزیده درس سوم (صفحه ۵۲ کتاب)

### فصل ۳ (آمار)

۵۶	نگاه کلی به فصل
۵۶	نقشه مفهومی فصل
۵۷	نمونه سؤالات ارزشیابی
۶۱	درس اول : شاخص های آماری
۶۱	اهداف درس اول
۶۱	روش تدریس
۶۲	مطالبی برای معلم در رابطه با $cpi$
۶۵	دانستنی های معلم
۶۶	حل تمرینات برگزیده
۷۰	درس دوم : سری های زمانی
۷۰	اهداف درس دوم
۷۰	مطالبی برای معلم
۷۱	روش تدریس
۷۵	حل تمرینات برگزیده

## سخنی با معلم<sup>۳</sup>

کتاب ریاضی و آمار (۲) پایه یازدهم رشته انسانی در جهت اهداف برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های درسی دوره اول متوسطه تألیف شده است. زمانی تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام دادن محاسبات بود. در رویکرد جدید، ضمن توجه به این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوه تفکر و تعقل و رشد توانایی حل مسئله است. در واقع رویکرد «آموزش برای حل مسئله» به «آموزش از طریق حل مسئله» تغییر کرده است. رسیدن به چنین هدفی، مشکلات و دشواری‌های فراوانی دارد و به سرعت امکان پذیر نیست ولی مدنظر قرار دادن آن می‌تواند جهت اصلی حرکت جامعه آموزش ریاضی را تعیین کند. در این میان، اصلی‌ترین و مؤثرترین وظیفه بر عهده معلم قرار دارد. قدرت انعطاف و هماهنگی و همراهی معلمان با برنامه‌های جدید ستودنی است. بر این اساس، مؤلفان کتاب حاضر سعی کرده‌اند برای انجام وظیفه خویش در مورد آموزش معلمان، ضمن اطلاع‌رسانی مناسب و به‌هنگام درباره تألیف، کتاب راهنمای معلم و نیز فیلم‌های آموزشی مربوط را به موقع در اختیار همکاران عزیز قرار دهند.

ساختار کتاب حاضر از سه بخش اصلی «فعالیت»، «کار در کلاس» و «تمرین» و نیز مثال‌های حل شده و توضیحات به صورت متنی، نکات مهم و تعاریف، تشکیل شده است. آنچه در هر «فعالیت» به طور عمده مدنظر بوده آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درس و سهیم بودن آنان در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت‌ها شامل مراحل می‌مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح راه حل، مرتب کردن، قضاوت در مورد یک راه حل و مقایسه راه حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها ساده و آسان نیست و صد البته، اجرای مناسب آن ارزش زیادی دارد. فعالیت‌ها در حد متوسط طراحی شده‌اند؛ بنابراین معلم می‌تواند با توجه به زمان و توانایی دانش‌آموزان خود، یک فعالیت را غنی‌تر کند یا با ارائه توضیحات بیشتر و ایجاد تغییراتی، آن را ساده‌تر نماید و حتی فعالیتی مکمل در جهت آموزش همان مفهوم درسی طراحی کند.

مؤلفان در کتاب ریاضی و آمار (۲) بر این باورند که استفاده از مثال‌ها و مسائل کاربردی که رابطه‌ای با شاخه‌های مختلف رشته علوم انسانی داشته باشد می‌تواند علاوه بر ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان برای یادگیری ریاضی و آمار به پرورش تفکر ریاضی در آنها کمک کرده طوری که در مواجهه با مسائل و مشکلات روزمره از این ذهنیت استفاده لازم را برده و در آینده افرادی خلاق، متفکر و با قدرت تجزیه و تحلیل و دلسوز برای خدمت به جامعه و ایران اسلامی تربیت شوند.

هنگام انجام دادن فعالیت‌ها، هدایت گفت‌وگوی کلاسی یا گفتمان ریاضی، که در آن دانش‌آموزان به

ارائه دیدگاه‌ها و دفاع از اندیشه‌های خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند، به عهده معلم است. به طور خلاصه، فراهم کردن موقعیت‌های یادگیری و فرصت دادن به دانش‌آموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دل‌مشغولی‌های همکاران عزیزمان باشد. «کار در کلاس» با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی، تعمیم یادگیری طراحی شده و انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در انجام آن داشته باشند. مثال‌ها توسط همکاران محترم در کلاس بررسی شده و سعی می‌شود تا همانند کار در کلاس‌ها دانش‌آموزان به حل و بررسی آنها مشغول باشند و روی نکات مهم و تعاریف که عمده‌تاً در داخل کادرهایی قرار دارند از طرف دبیران محترم تأکید لازم انجام خواهد پذیرفت. حل «تمرین»‌ها به عهده دانش‌آموزان است؛ اما ضرورت دارد که معلم زمینه را برای طرح پاسخ‌ها و بررسی آنها در کلاس فراهم سازد. گروه تألیف، آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و عزیزان را از طریق وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی<sup>1</sup> دارد. به علاوه، بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه داده شده قابل دریافت است. اطمینان داریم که با اتکال به خدای متعال و تکیه بر تلاش، اراده و همت شما دبیران محترم می‌توانیم به برآورده شدن اهداف کتاب امیدوار باشیم.

مؤلفان



# فصل ۱

## آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

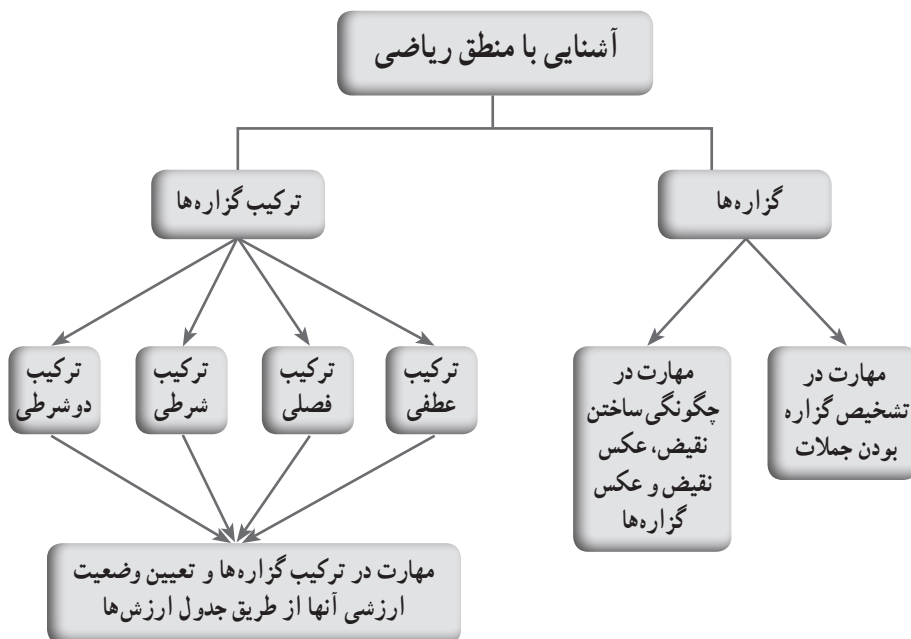
## نگاه کلی به فصل

دانش‌آموزان در این فصل با مبانی منطق ریاضی و کاربرد آن در برخی زمینه‌های مختلف آشنا می‌شوند. پیدایش بسیاری از نظریه‌های علم ریاضی، نتیجه استدلال است و ما برای مطالعه شاخه‌های مختلف ریاضیات، به استدلال نیاز داریم؛ بنابراین، لازم است تعاریف، اصطلاحات و علامت‌هایی را که به کمک آنها مفاهیم ریاضی را از طریق استدلال بیان می‌کنیم، بشناسیم به این منظور به علم منطق رجوع می‌کنیم. مطالب این فصل شامل دو درس است. درس اول به مفهوم گزاره از دید علم ریاضی، یا به طور دقیق‌تر، منطق ریاضی می‌پردازد و وجوه تمایز آن با آنچه در محاوره از مفهوم گزاره به ذهن متبادر می‌شود را بیان می‌کند. در ادامه، انواع گزاره‌های موجود در منطق ریاضی مطرح می‌شود. در این بخش فقط به ساده‌ترین انواع گزاره‌ها پرداخته شده است. در ضمن انواع و ارزش هر یک از گزاره‌ها، از طریق جدول ارزش گزاره‌ها، بررسی شده است. در درس دوم (استدلال ریاضی) ضمن برقراری ارتباط با مباحث درس منطق که دانش‌آموزان رشته علوم انسانی و معارف اسلامی می‌گذرانند، از دیدگاه ریاضیاتی به همان مطالب پرداخته می‌شود؛ بنابراین، با مثال‌های ساده و مبتنی بر دانش قبلی این دانش‌آموزان، از زاویه دید استدلالی، موضوعات آشنای ریاضی بررسی می‌شود. دبیران و دانش‌آموزان از این رهگذر با بدفهمی‌های رایج در ریاضی آشنا می‌شوند و آنها را برطرف می‌کنند.

هر درس شامل مثال‌هایی است تا دانش‌آموزان با الگو گرفتن از آنها به «فعالیت» و «کار در کلاس» بپردازند و به درک بهتری از موضوع درس برسند.

در پایان هر درس نیز تمرینات مختلفی، منطبق بر «فعالیت» و «کار در کلاس»، ارائه شده است تا دانش‌آموزان با حل آنها میزان تسلط خود بر مطالب را ارزیابی کنند.

## نقشه مفهومی فصل اول



## دانستنی‌های معلم

## تاریخچه پیدایش منطق جدید

تاریخ منطق سنتی و نظام‌مند کردن آن توسط ارسطو (۳۲۳-۳۸۴ ق.م) و بارور شدن آن به دست مسلمانان برای کمتر کسی مبهم است. گرچه لایب نیتس (۱۷۱۶-۱۶۴۶ میلادی) فیلسوف و ریاضی‌دان بزرگ آلمانی را پدر منطق جدید خوانده‌اند، زیرا او برای اولین بار در کتاب «حساب عمومی» از نهادهای شبه ریاضی برای بیان برخی مطالب منطقی بهره جست، اما مؤسس واقعی منطق جدید، گوتلوب فرگه (۱۸۳۸-۱۹۲۵ میلادی) فیلسوف و ریاضی‌دان آلمانی است. او نخستین نظام کامل اصل موضوعی را، که یکی از روش‌های عمده برای آموزش در منطق جدید است، بنیان نهاد. او با نوشتن کتاب «مفهوم‌نگاری» به گسترش هر چه بیشتر این دانش کمک کرد. تحقیقات فرگه به وسیله ژوزف پتانو (۱۸۵۸-۱۹۳۲ میلادی) ریاضی‌دان ایتالیایی و دو تن از فلاسفه و ریاضی‌دانان بزرگ انگلیسی به نام‌های برتراند راسل (۱۸۷۰-۱۸۷۲ میلادی) و آلفرد نورث وایتهد (۱۸۷۱-۱۹۳۷ میلادی) ادامه یافت. این دو کتابی به نام «اصول ریاضی» نگاشتند که بیش از پیش به رونق و

باروری منطق جدید کمک کرد.

«منطق جدید» را «منطق ریاضی» و «منطق نمادین (سمبلیک)» نیز می‌گویند.

مثلاً در ریاضیات داریم :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$$

در رابطه فوق به ازای هر مقدار  $a$  و  $b$  همواره تساوی برقرار است و آن را به عنوان «اتحاد» می‌شناسیم.

در منطق جدید هم قضایایی از قبیل قانون‌های دمورگان هست که به صورت زیر ارائه می‌شوند.

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

درستی این معادله‌های منطقی به مفاد و مضمون گزاره‌های  $p$  و  $q$  بستگی ندارد، بلکه صرفاً ناشی از صورت

منطقی ترکیب آنها با یکدیگر است. به درستی‌هایی از این دست، «درستی منطقی» و یا «درستی صوری» (درستی از روی صورت) می‌گویند.

### انگیزه و اهداف در منطق ریاضی

تحقیقات علمی درباره منطق ریاضی، در پی بروز پرسش‌های نوین در بنیان‌های ریاضیات پدید آمد؛ مثلاً فرگه می‌کوشید تا ریاضیات را بر پایه اصول برآمده از منطق و نظریه مجموعه‌ها قرار دهد. راسل کوشید تناقضات ناشی از دستگاه منطق فرگه را حذف کند و هدف هیلبرت نشان دادن این امر بود که «روش‌های مورد قبول عام در ریاضیات، هرگاه به طور همه‌جانبه، کلی‌نگرانه و به عنوان یک کل واحد در نظر گرفته شوند، به هیچ نوع تناقضی منجر نخواهد شد» (این موضوع به برنامه هیلبرت شهرت یافته است).

### کاربردهای ریاضی

در منطق ریاضی، نه تنها از روش‌ها و نتایج به دست آمده در حل مسائل بنیانی استفاده می‌شود، بلکه در بسیاری شاخه‌های دیگر ریاضیات، نظیر جبر و توپولوژی، هم از آنها بهره‌برداری می‌شود.

## نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ جاهای خالی را کامل کنید :

- (الف) ارزش گزاره  $p \vee \sim p$ ، همواره ..... است.  
 (ب) اگر ارزش گزاره  $p \Rightarrow q$  نادرست و  $p$  درست باشد، ارزش  $q$  ..... است.  
 (ج) اگر ارزش گزاره  $p \Leftrightarrow q$  درست و  $q$  نیز درست باشد، ارزش  $p$  ..... است.  
 (د) عکس نقیض گزاره  $p \Rightarrow \sim q$ ، گزاره ..... است.  
 (ه) هم‌ارزی  $p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$  به قانون ..... معروف است.  
 (و) در حالت کلی،  $n$  گزاره نسبت به یکدیگر دارای ..... حالت ارزشی هستند.  
 (ز) نقیض نقیض هر گزاره، هم‌ارز با ..... است.

۲ کدام یک از جملات زیر گزاره هستند؟

- (الف)  $-1 < 3$   
 (ب) چه منظره زیبایی!  
 (ج) چرا ریاضیات می‌خوانید؟  
 (د)  $19$  عددی فرد است.  
 (ه)  $a^n$  عددی مثبت است.  
 (و) لطفاً پرسشنامه را کامل کنید!  
 (ز) معلم ریاضی مدرسه ما خوش اخلاق است.  
 (ح) عدد  $2$  گویا نیست.  
 ۳ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید :

- (الف)  $\sqrt{2}$  عددی مثبت است.  
 (ب) عدد  $8$  بر  $4$  بخش پذیر است.  
 (ج) توکیو پایتخت ترکیه است.  
 (د) عدد  $2$  فرد است.  
 (ه)  $5 > 3$   
 (و)  $\sqrt{4+9} = 2+3$   
 (ز) اگر  $a$  زوج باشد، آن گاه  $a+1$  فرد خواهد بود.  
 (ح) عدد  $15$  فرد و بر  $3$  بخش پذیر است.  
 (ط)  $11$  عددی اول است یا  $2$  عددی منفی است.  
 (ی) اگر چهارضلعی مستطیل باشد، آن گاه دو قطرش مساوی‌اند.  
 ۴ عکس، نقیض و عکس نقیض گزاره‌های شرطی زیر را بنویسید :  
 (الف) اگر دو عدد حقیقی با هم برابر باشند، آن گاه مجذور آن دو عدد مساوی هستند.  
 (ب) اگر چهارضلعی  $ABCD$  لوزی باشد، آن گاه اقطار آن بر هم عمودند.

۵ جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	کشور ایران در قاره آسیا قرار دارد و .....	✓	
۲	۳۱ عددی اول نیست یا .....		✓
۳	شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، آن است که روی نیمساز زاویه باشد.		
۴	اگر ..... آن‌گاه $(a+b)^2 = a^2 + b^2$	✓	
۵	اگر .....، آن‌گاه ..... و برعکس	✓	
۶	..... و .....	✓	
۷	..... یا .....	✓	

۶ ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید :

(الف) مسکو پایتخت روسیه و تهران پایتخت ایران است.

(ب)  $4^2 = 4^2$  و  $3 - x = x - 3$

(ج)  $1 > 2$  یا  $4 < 1$

(د) ۲۱ عددی اول یا فرد است.

(هـ)  $\frac{2}{3} \neq 0$  یا  $2^2 + 2^3 = 2^5$

(و) اگر عددی بر ۴ بخش پذیر باشد، آنگاه بر ۲ نیز بخش پذیر است.

(ز) اگر  $a < 0$ ، آن‌گاه  $|a| = -a$

(ح) ۶ عددی اول است، آن‌گاه  $2^3 = 6$

(ط)  $2 < 3$  اگر و تنها اگر  $-3 < -2$

(ی)  $15 < 7$  اگر و تنها اگر  $2 - 7 < 2 - 15$

(خ) اگر مثلث، قائم‌الزاویه باشد، آنگاه مربع یکی از ضلع‌ها، برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است و برعکس.

۷ هرگاه  $p \wedge q \sim p$  گزاره‌ای درست و  $r$  یک گزاره دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را در صورت امکان

مشخص کنید :

(ج)  $(r \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \sim q$

(ب)  $(q \vee r) \wedge \sim p$

(الف)  $p \vee (q \Rightarrow r)$

(هـ)  $\sim(\sim p \wedge q) \wedge r$

(د)  $(p \Leftrightarrow q) \vee r$

۸ اگر  $p$  یک گزاره درست و  $q$  و  $r$  گزاره‌های دلخواه باشند، بررسی کنید کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است.

الف)  $\sim p \wedge q \Rightarrow r$       ب)  $\sim p \vee q \Rightarrow r$

ج)  $p \wedge q \Rightarrow r$       د)  $p \vee q \Rightarrow r$

۹ اگر ارزش گزاره  $p \Rightarrow (p \wedge q)$  درست باشد، ارزش گزاره  $p \wedge \sim q$  چیست؟

۱۰ اگر ارزش گزاره  $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$  نادرست باشد، ارزش گزاره  $(p \vee q) \Rightarrow p$  چیست؟

۱۱ اگر  $p$  درست و  $q$  نادرست باشند، ارزش گزاره  $\sim p \vee (q \Rightarrow p)$  چیست؟

۱۲ ارزش گزاره  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$  را در حالت‌های زیر مشخص کنید:

الف)  $p$  نادرست و  $q$  درست      ب)  $p$  نادرست و  $q$  نادرست

۱۳ گزاره‌های زیر در چه حالتی نادرست هستند؟

الف)  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$       ب)  $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$

۱۴ اگر گزاره مرکب  $S$  متشکل از گزاره‌های ساده  $p$  و  $q$ ، جدول ارزش زیر را داشته باشند، گزاره مرکب  $S$  را در هر حالت بیابید.

ب)

$p$	$q$	$s$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

الف)

$p$	$q$	$s$
د	د	ن
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	ن

۱۵ جدول ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف)  $\sim [\sim p \wedge (p \vee q)]$       ب)  $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$

۱۶ با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را نشان دهید:

الف)  $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv T$       ب)  $p \wedge \sim [q \vee (p \wedge \sim q)] \equiv F$

ج)  $p \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$       د)  $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$

۱۷ با استفاده از جدول ارزش‌ها بررسی کنید ارزش کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره درست و کدام‌یک همواره نادرست است.

ب)  $p \wedge \sim (p \vee q)$

الف)  $(p \wedge q) \Rightarrow p$

ج)  $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q)$



## گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

### اهداف درس اول

- ۱ آشنایی با مفهوم منطق ریاضی و کاربرد آن
- ۲ آشنایی با مفهوم گزاره‌ها و تعیین ارزش آنها
- ۳ مهارت چگونگی ساختن نقیض، عکس نقیض و عکس گزاره‌ها
- ۴ آشنایی با ترکیب گزاره‌ها و جدول ارزش‌ها
- ۵ مهارت در بررسی درستی گزاره‌های هم‌ارز با استفاده از جدول ارزش‌ها
- ۶ تشخیص استدلال‌های معتبر از استدلال‌های نامعتبر

### روش تدریس

دانش‌آموزان در سال دهم، درسی به نام منطق را گذرانده‌اند و با مبحث منطق و تا حدی با گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها آشنایی دارند. در ابتدای درس، برای یادآوری، علم منطق و همچنین کاربرد آن، به اختصار، بیان شده سپس تعریف گزاره و چند مثال ذکر شده است.

فعالیت صفحه ۲ کتاب، برای مهارت در تشخیص گزاره بودن جملات است تا دانش‌آموزان بدانند شرط درستی یا نادرستی گزاره این است که جمله خبری معنادار باشد. قسمت الف سؤال ۱، جمله پرسشی است، پس گزاره نیست. قسمت ب، گزاره است و ارزش آن درست است. قسمت پ، گزاره است و ارزش آن نادرست است. قسمت ت گزاره و ارزش آن نادرست است. قسمت ث، گزاره و ارزش آن نادرست است. در جمله قسمت ج کلمه «همواره» آمده پس گزاره است و ارزش آن نادرست. قسمت چ، گزاره نیست؛ چون کلمه «خوشمزه» دارای مفهومی نسبی است. قسمت ح، جمله امری است، پس گزاره نیست.

بعد از تشخیص گزاره بودن جملات، در سؤال ۲ از دانش‌آموزان خواسته شده تا با درک و خلافت خودشان دو گزاره درست و دو گزاره نادرست و همچنین دو جمله که گزاره نباشند را مثال بزنند.

دو گزاره درست مانند :

۱  $\sqrt{2}$  عددی مثبت است.

۲ رودسر شهری در استان گیلان است.

دو گزاره نادرست مانند :

۱  $-2 < -1$

۲ عددی ۲۵ مربع کامل نیست.

دو جمله که گزاره نباشند مانند :

۱ کتاب را بردار!

۲ فرید دانش آموز خوبی است.

سپس تعیین ارزش دو یا چند گزاره مطرح شده است. در حالت کلی،  $n$  گزاره نسبت به یکدیگر دارای  $2^n$  حالت ارزشی هستند.

در کتاب، جدول ارزش‌ها برای یک، دو و سه گزاره نشان داده شده است.

اگر  $p$  یک گزاره باشد، نقیض آن گزاره‌ای است منحصر به فرد که با  $(\sim p)$  نمایش داده می‌شود. «کاردر کلاس» صفحه ۴ کتاب برای مهارت یافتن دانش‌آموزان در تشخیص نقیض گزاره‌ها و ارزش آنها است. حل برگزیده‌ای از «کار در کلاس» صفحه ۴ کتاب :

الف) چنین نیست که عدد ۵ زوج باشد. یا عدد ۵ فرد است (ارزش گزاره درست است).

ب) تساوی « $4=2 \times 2$ » برقرار نیست. (ارزش گزاره نادرست است).

ج)  $(3 \times 7) \times (5 \times 4) \neq (3 \times 7) \leq (5 \times 4)$ . (ارزش گزاره درست است).

در مبحث ترکیب گزاره‌ها، به ترتیب ترکیب عطفی، ترکیب فصلی، ترکیب شرطی و ترکیب دوشروطی و نمادهای آنها معرفی شده و جدول ارزش‌های هر یک نشان داده شده است.

در تبیین ارزش‌دهی به گزاره‌های مرکب، غالباً دو رویکرد وجود دارد :

۱ ایجاد شهود نسبت به ارزش گزاره‌های ترکیبی و سپس معرفی جدول ارزش‌ها؛

۲ معرفی جدول ارزش‌ها و سپس شهودی کردن ارزش‌گذاری گزاره‌های مرکب.

بعد از معرفی هر یک از ترکیب‌های مذکور، فعالیتی برای درک بهتر دانش‌آموزان از مفهوم درس بیان شده است. در ردیفی از جدول فعالیت‌ها گزاره مرکبی داده شده و تشخیص ارزش درستی یا نادرستی آن خواسته شده است. در ردیف‌های دیگر، از دانش‌آموز خواسته شده است گزاره مرکب را طوری کامل کند که ارزش آن با ارزشی که در جدول برای آن تعیین شده است، مطابقت داشته باشد.

برای حل فعالیت صفحه ۵ کتاب، دانش‌آموزان آموخته‌اند اگر در بین دو گزاره، رابط «و» باشد، آن ترکیب، عطفی است و ارزش آن زمانی درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشند؛

مثلاً ردیف ۳ جدول، ارزش گزاره مرکب، نادرست در نظر گرفته شده است، پس حداقل ارزش یکی از گزاره‌ها باید نادرست باشد. چون ارزش گزاره دوم (۸ زوج است) درست است، پس برای گزاره اول باید گزاره‌ای را مثال بزنند که دارای ارزش نادرست است؛ مثل:  $\sqrt{2}$  عددی گویا است.

برای حل فعالیت صفحه ۶ کتاب، دانش‌آموزان آموخته‌اند که اگر رابط بین دو گزاره، «یا» باشد، ترکیب فصلی است و ارزش آن زمانی درست است که حداقل ارزش یکی از گزاره‌ها درست باشد؛ مثلاً در ردیف ۴ جدول، ارزش گزاره مرکب، نادرست در نظر گرفته شده است. از طرفی ارزش گزاره دوم «افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است» نادرست است، پس برای گزاره اول مثالی می‌نویسند که ارزش آن هم نادرست باشد؛ مثل: افلاطون شاگرد ارسطو است.

در فعالیت صفحه ۷ کتاب، دانش‌آموزان می‌دانند که در صورتی که رابط گزاره‌ای «اگر» باشد، ترکیب شرطی است و فقط زمانی ارزش آن نادرست است که ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست باشند؛ مثلاً در ردیف ۷ جدول، ارزش گزاره مرکب، درست تعیین شده است. از طرفی ارزش تالی «۹۹ اول است» نادرست است؛ بنابراین، دانش‌آموز گزاره‌ای می‌نویسد که ارزش آن نادرست باشد و به این ترتیب، گزاره شرطی حاصل، به انتفای مقدم، دارای ارزش درست می‌شود؛ مثل:  $3^2=6$

هدف از «کار در کلاس» صفحه ۷ کتاب، مهارت یافتن دانش‌آموزان در تعیین ارزش گزاره‌های مرکب است؛ مثلاً:

$$۳) (p \Rightarrow q) \wedge r \Rightarrow (T \Rightarrow F) \wedge r \Rightarrow F \wedge r \equiv F$$

$$۶) (p \Rightarrow q) \Rightarrow r \Rightarrow (T \Rightarrow F) \Rightarrow r \Rightarrow F \Rightarrow r \equiv T$$

ارزش این گزاره مرکب، به انتفای مقدم، همواره درست است.

در فعالیت صفحه ۸ کتاب، دانش‌آموز ترکیب دوشروطی و نماد و اصطلاحات آن را می‌شناسد و می‌داند ارزش گزاره دوشروطی، زمانی درست است که هر دو گزاره هم‌ارزش باشند؛ مثلاً در ردیف ۴ جدول، ارزش گزاره مرکب، نادرست تعیین شده است. پس دانش‌آموز باید دقت کند که برای هر کدام از گزاره‌های شرطی  $q \Rightarrow p$  و  $p \Rightarrow q$  مثالی بنویسد که هم‌ارزش نباشند؛ مثل:

اگر  $x > 0$ ، آنگاه  $x' > 0$  و برعکس.

در اینجا گزاره « $x > 0 \Rightarrow x' > 0$ » دارای ارزش درست است،

ولی عکس آن « $x' > 0 \Rightarrow x > 0$ » دارای ارزش نادرست است.

از «کار در کلاس» صفحه ۹ کتاب، چند سؤال را برای نمونه، پاسخ می‌دهیم.

ارزش گزاره مرکب نادرست است.  $\rightarrow$   $۱) (p \xleftrightarrow[n]{d} q) \wedge r$

ارزش گزاره مرکب درست است.  $\rightarrow (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

$\underbrace{\begin{array}{cc} \text{د} & \text{ن} \\ \text{د} & \text{ن} \end{array}}_{\text{ن}}$

ارزش گزاره مرکب نادرست است.  $\rightarrow (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

$\underbrace{\begin{array}{cc} \text{د} & \text{ن} \\ \text{د} & \text{ن} \end{array}}_{\text{ن}}$

ارزش گزاره مرکب نادرست است.  $\rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

$\underbrace{\begin{array}{cc} \text{د} & \text{ن} \\ \text{د} & \text{ن} \end{array}}_{\text{ن}}$

مثال صفحه ۹ کتاب، بررسی درستی هم‌ارزی‌ها، با کمک جدول ارزش‌ها، خواسته شده است. در این مثال ابتدا دانش‌آموزان با کامل کردن جاهای خالی در جدول ارزش‌ها، با نحوه بررسی درستی هم‌ارزی گزاره‌ها آشنا می‌شوند؛ سپس با الگو گرفتن از آن، به تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب پاسخ خواهند داد.

### توصیه آموزشی

به همکاران محترم توصیه می‌شود:

□ به کتاب درسی منطق سال دهم، نظری داشته باشند تا با آنچه دانش‌آموزان به عنوان پیش‌نیاز یاد گرفته‌اند، آشنا شوند.

□ در تدریس مبحث گزاره‌ها، از حیطه مطالب کتاب خارج نشوند. همچنین سطح سؤال‌ها در یک کلاس معمولی، از آنچه در تمرینات کتاب مطرح شده است، فراتر نرود.

□ در بررسی درستی گزاره‌های معادل (هم‌ارز)، فقط از جدول ارزش‌ها استفاده شود.

### اشتباهات رایج دانش‌آموزان

ممکن است برخی دانش‌آموزان در ابتدا برای بررسی درستی گزاره‌های هم‌ارز، در یک جدول دچار اشتباه شوند. می‌توانند برای گزاره‌های مرکب در دو طرف رابطه هم‌ارزی، جدول ارزش‌ها را به طور جداگانه تشکیل داده و سپس ستون آخر دو جدول را با یکدیگر مقایسه کنند.

نمونه : مثال ۱ قسمت الف در صفحه ۹ کتاب :

$$p \Rightarrow q \equiv (\sim p \vee q)$$

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

$p$	$q$	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$
د	د	ن	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د
ن	ن	د	د

### حل تمرینات برگزیده درس اول (صفحه ۱۰ کتاب)

۱ جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزه پیامبر اسلام ﷺ قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.	✓	
۲	اگر ۲ عدد فرد باشد، آن گاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آن گاه تهران در قاره آسیا نیست.	✓	
۴	$4^2 > 8^2 \Rightarrow 2^2 = 4 \times 2$	✓	
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آن گاه ۱۸ مربع کامل است.	✓	
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آن گاه عدد ۵ اول است.	✓	
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آن گاه افلاطون معلم اول است.	✓	
۸	امام خمینی <small>رحمته الله علیه</small> در سال ۱۳۴۳ تبعید شدند و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.	✓	
۹	حضرت علی <small>علیه السلام</small> اولین مردی است که به پیامبر اسلام، ایمان آوردند و همسر حضرت فاطمه <small>علیها السلام</small> بودند.	✓	
۱۰	اگر $4^2 = 3^2 + 1^2$ آنگاه $1^2 = 3^2 - 4^2$ و برعکس	✓	

۲ اگر  $p$  گزاره‌ای درست و  $q$  گزاره‌ای نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید :

$$\begin{aligned} & \text{پ) } (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r) \\ & \left. \begin{aligned} p \equiv T, q \equiv F &\rightarrow p \wedge q \equiv F \\ \sim p \equiv F, r \equiv ? &\rightarrow \sim p \wedge r \equiv F \end{aligned} \right\} \rightarrow F \Leftrightarrow F \equiv T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ث) } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \\ & \left. \begin{aligned} p \equiv T, q \equiv F &\rightarrow p \Rightarrow q \equiv F \\ \sim q \equiv T, \sim p \equiv F &\rightarrow \sim q \Rightarrow \sim p \equiv F \end{aligned} \right\} \rightarrow F \Leftrightarrow F \equiv T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ج) } (q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \\ & \left. \begin{aligned} p \equiv T, q \equiv F &\rightarrow p \vee q \equiv T \\ r \equiv ?, p \equiv T &\rightarrow r \Rightarrow T \equiv T \end{aligned} \right\} \rightarrow T \Leftrightarrow T \equiv T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ح) } (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r \\ & \left. \begin{aligned} \sim q \equiv T, \sim p \equiv F &\rightarrow \sim q \Rightarrow \sim p \equiv F \\ r \equiv ? & \end{aligned} \right\} \rightarrow F \wedge r \equiv F \end{aligned}$$

۳ درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید :

ب)  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p$	$q$	$r$	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

ث)  $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p$	$q$	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$(p \vee q)$	$(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

ج)  $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

$p$	$q$	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

# استدلال ریاضی

## درس دوم

### اهداف درس دوم

هدف کلی این درس، آشنایی دانش‌آموزان با گوشه‌ای از استدلال ریاضی و اهمیت آن است.  
اهداف جزئی این درس به قرار زیر است:

- ۱ تبدیل عبارات کلامی به عبارات ریاضی (بدون حل مسئله ریاضی به‌دست آمده)؛
- ۲ استفاده از منطق گزاره‌ها برای بررسی صحت استدلال‌های ریاضی که در درس اول با آنها آشنا شدند.
- ۳ اثبات یک گزاره ریاضی جزء اهداف این درس نیست و مثال‌های ذکر شده فقط برای آشنایی دانش‌آموزان با نحوه استدلال ریاضی است.

### روش تدریس

در ابتدای درس، با ارائه مثال‌هایی، به دانش‌آموز این انگیزه داده می‌شود که استفاده از ریاضی برای استدلال، به وضوح گزاره‌ها و عبارات و تشخیص درستی یا نادرستی استدلال‌ها کمک می‌کند. این مثال‌ها با یک مسئله که در فصل اول کتاب ریاضی و آمار ۱ آمده است، (به صورت نیمه حل شده) شروع می‌شود. لازم است که دبیران محترم با یادآوری آن سؤال، از آشنایی دانش‌آموزان با برخی مفاهیم مقدماتی (مانند اعمال روی عبارات جبری) اطمینان حاصل کنند (ارزشیابی تشخیصی). ادامه درس، اهمیت استدلال ریاضی مبتنی بر منطق گزاره‌ها و استفاده از ریاضی در استدلال را آشکار می‌کند.

در ابتدای درس، با ذکر ۳ مثال حل شده، اهمیت استفاده از ریاضی در خلاصه‌سازی عبارات کلامی و واضح‌سازی معنایی که در یک عبارت نهفته است نشان داده می‌شود.

در «کار در کلاس» صفحه ۱۳ از دانش‌آموزان خواسته شده که مشابه مثال‌های قبل، عبارات کلامی داده شده را به یک عبارت ریاضی برگردانند. لزوم کسب این مهارت برای دانش‌آموزان رشته‌های علوم انسانی و



معارف اسلامی در آن است که این سنخ تبدیلات یا مشابه آنها در فلسفه‌های متأخر (از جمله فلسفه تحلیلی) بسیار شایع است. از سوی دیگر در فرایند تبدیل عبارات کلامی به عبارات ریاضی، دانش‌آموزان قدرت ذهنی انتزاعی‌سازی مفاهیم را که در بسیاری از حوزه‌های علوم انسانی (مانند فلسفه، منطق و حقوق) کاربرد دارد و از شالوده‌های اصل نظریه‌پردازی در این حوزه‌هاست، فرا می‌گیرند.

در ادامه در صفحه ۱۴ به یک نوع از انواع قیاس‌ها، که دانش‌آموزان رشته علوم انسانی در درس منطق خود فرا می‌گیرند، پرداخته شده است. این نوع قیاس در استدلال‌های ریاضی بسیار پرکاربرد است. در این درس مثالی از کاربرد ناصحیح این قیاس آورده شده، تا بدفهمی‌های رایج از ساختار این قیاس رفع شود. دبیر محترم می‌تواند مشابه این نوع مثال‌ها را در کتاب منطق بیابد.

در «کار در کلاس» صفحه ۱۵ از دانش‌آموز خواسته می‌شود که قیاس استثنایی فراگرفته را در یک استدلال ریاضی اجرا کند.

### پاسخ «کار در کلاس» صفحه ۵۱ (بالای صفحه)

۱

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

۲

دو خط هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند:

$$p \Rightarrow q \text{ دو خط موازی باشند}$$

$$p: x > 0 \Rightarrow q: x^2 > 0$$

$$\frac{p: 36^\circ}{\therefore 96^\circ} \quad \frac{p: \text{خطوط } L_1 \text{ و } L_2 \text{ موازی هستند}}{\therefore \text{خطوط } L_1 \text{ و } L_2 \text{ هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند}}$$

در ادامه درس، مثالی از یک معمای کلامی آورده شده که با استفاده از یک استدلال ریاضی ساده به جواب آن پی می‌بریم. این مثال و همین‌طور تعمیم آن که در کار در کلاس بعدی آمده است، فقط به منظور

آشنایی دانش‌آموزان با نحوه ورود مفاهیم ریاضی در استدلال‌هایی است که ظاهراً ربطی به ریاضی ندارند. کاربرد دیگر این مثال، تبیین این موضوع است که چگونه خواسته مسئله وقتی به زبان ریاضی درمی‌آید واضح‌تر می‌شود. به هر حال تأکید می‌شود که مشابه این گونه سؤالات در ارزشیابی استفاده نشود.

### پاسخ «کار در کلاس» صفحه ۱۵ (پایین صفحه)

۱ این حالت به «حالت بدیهی» معروف است. کافی است دو لیوان کناری ( $A, C$ ) را با یک حرکت به سمت بالا تغییر جهت داد تا همه لیوان‌ها به سمت بالا باشند. راه دیگر این است که ابتدا یکی از لیوان‌های کناری ( $A$  یا  $C$ ) را همراه با لیوان  $B$  تغییر دهند که در این صورت لیوان کناری درست شده و لیوان وسطی ( $B$ ) نادرست می‌شود (حرکت اول). اکنون دو لیوان نادرست داریم که با یک حرکت می‌توان آنها را نیز درست کرد (حرکت دوم).

۲ مطابق همان استدلال گفته شده در مثال حل شده بالای این کار در کلاس، هرگز نمی‌توان تعداد فردی لیوان وارونه را اصلاح کرد چرا که همواره  $S$  به اندازه یک عدد زوج تغییر می‌کند.

در صفحه ۱۶ ابتدا یک اثبات ریاضی آمده است که برای آشنایی با ترتیب و توالی به کارگیری منطق گزاره‌هاست. این نوع اثبات‌ها برای ارزشیابی مدنظر نیستند.

در ادامه این صفحه به چند مثال از استدلال‌های ریاضی غلط پرداخته شده. در این بخش از درس، فرصتی فراهم شده تا برخی اشکالات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان، که اغلب در برگه‌های امتحانی آنها وجود دارد، پرداخته شود. به دبیران محترم توصیه می‌شود که متناسب با سطح آموزشی دانش‌آموزان خود و با استفاده از اشتباهات رایج آنها در برگه‌های امتحانی، دانش‌آموزان را در تصحیح فرایند حل مسئله ریاضی کمک کنند. دانش‌آموزان باید یاد بگیرند که پس از حل هر مسئله چگونه صحت آن را از طریق استدلال ریاضی برای خود بررسی کنند.

در «کار در کلاس» صفحه ۱۷ نمونه‌های دیگری از استدلال‌ها ارائه شده است که فقط یک استدلال از بین آنها درست است (گزینه پ). توصیه می‌شود که دبیران محترم یک سؤال ساده از مطالب سال قبل را به دانش‌آموزان داده از آنها بخواهند سؤال را جواب دهند. سپس برگه‌های دانش‌آموزان، برای تصحیح، به صورت تصادفی میان آنان تقسیم شود طوری که دانش‌آموزان برگه خود را تصحیح نکنند. سپس از دانش‌آموزان خواسته شود درستی و نادرستی جواب داده شده در برگه را با دلیل شرح دهند.

### پاسخ تمرین‌های برگزیده

۱ دقت شود که درستی یا نادرستی عبارت کلامی داده شده اهمیت ندارد و تنها تبدیل آن به نماد ریاضی

(بدون بررسی درستی یا نادرستی این عبارت) مدّ نظر است.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} \quad \sqrt{x} = x & \text{ب)} \quad x^2 > 7x + 5 \\ \text{پ)} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq x + y & \text{ت)} \quad x^2 + y^2 \geq (x + y)^2 \\ \text{ث)} \quad x \neq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{x} \end{array}$$

دقت شود که قسمت ت و ث دارای سطح دشواری بالاتری هستند و برای ارزشیابی، سؤالاتی در این سطح به صلاحدید دبیر محترم می‌تواند مطرح نشود.

۲ دقت شود که در این گونه سؤالات، استدلال داده شده و نیز نادرستی آن اعلام شده و دانش‌آموز فقط باید دلیل نادرست بودن آن را شرح دهد.

الف) در استدلال داده شده طول و عرض دو برابر نشده است.

ب) در استدلال داده شده در فاکتورگیری اشتباه شده و از مبحث تجزیه عبارات جبری می‌دانیم که عدد ۴ را نمی‌توان فاکتور گرفت.

پ) در استدلال گفته شده، عمل ساده کردن عدد ۳ از صورت و مخرج مجاز نیست؛ چون امکان فاکتورگیری از عدد ۳ وجود ندارد.

## نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید:

الف) عددی با مربع خودش برابر است. پاسخ:  $x = x^2$

ب) دو برابر عددی به علاوه خودش، برابر با عددی دیگر است. پاسخ:  $2x + x = y$   
 $3x = y$

ج) جذر عددی برابر مکعب خودش است. پاسخ:  $\sqrt{x} = x^3$

۲ استدلال‌های زیر برای مسئله داده شده نادرست است. دلیل نادرستی آن را بیان کنید:

الف) اتحاد روبه‌رو برقرار است.  $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

استدلال:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

پاسخ: دلیل نادرستی استدلال، نادرست بودن ضرب علامت‌هاست. در واقع، حاصل ضرب عددی منفی در عدد منفی، مثبت است. (دبیران محترم دقت دارند که اشتباه در ضرب علامت‌ها از اشتباهات رایج دانش‌آموزان است که در قالب این گونه استدلال‌های نادرست می‌توان به آن پرداخت).

(ب) عبارت گویای روبه‌رو را ساده کنید.

$$\frac{x^2 + x}{x^2} = x$$

استدلال:

$$\frac{\cancel{x}^2 + x}{\cancel{x}^2} = x$$

پاسخ: دلیل نادرستی استدلال، عدم امکان ساده کردن صورت و مخرج در حالت جمعی است. (دبیران محترم دقت دارند که این نیز از اشتباهات رایج در ساده‌سازی عبارات است).

## فصل ۲

تابع

## نگاه کلی به فصل

یکی از مهم‌ترین علل بی‌علاقه‌گی دانش‌آموزان به درس ریاضی، تصور مرتبط نبودن مفاهیم ریاضی با زندگی روزمره است. در مقابله با این تصور، از اوایل دهه ۱۹۷۰ حرکتی در آموزش ریاضی توسط ریاضی‌دان هلندی، فرودنتال<sup>۱</sup>، به نام ریاضیات واقعیت مدار، "Realistic Mathematics Education" شکل گرفت. این تفکر در مقابل آموزش سنتی ریاضی است که بر انجام محاسبات عددی صرف و توجه اندک به کاربردهای مسئله تأکید داشت. آموزش ریاضی واقعیت مدار، بر این اعتقاد استوار است که ریاضی یک فرایند و فعالیت انسانی است و باید به واقعیت و مسائل جامعه متصل باشد. از ویژگی‌های دیگر این حرکت نوین در آموزش ریاضی، موارد زیر است:

۱ دانش‌آموز نباید دریافت‌کننده منفعل مفاهیم از پیش آماده شده ریاضی باشد، بلکه باید به سمت فرصت‌هایی برای بازآفرینی ریاضی از طریق انجام دادن آن باشد.

۲ ریاضی یک فعالیت طبیعی و اجتماعی است.

۳ لازم است دانش‌آموز درک ریاضی خود را از طریق کار روی زمینه‌هایی که برای او با معنا است، تجربه کند.

۴ نظام آموزش ریاضی باید در دانش‌آموز نسبت به محیط پیرامون خود، نگاه کنجکاوانه ایجاد کند این نگاه می‌تواند انگیزه‌ای برای پذیرش مسئولیت‌های اجتماعی در سال‌های آینده از سوی دانش‌آموز باشد.

۵ فلسفه آموزش ریاضی، رسیدن به نگاهی دقیق‌تر و علمی‌تر به پیرامون است.

شناخت و قبول این ویژگی‌ها، مسئولیت ما را در چگونگی آموزش و گسترش مفاهیم ریاضی به دانش‌آموزان دو چندان می‌کند.

## اهداف کلی

۱ معرفی توابع ثابت، همانی، چند ضابطه‌ای، پلکانی و قدر مطلق؛

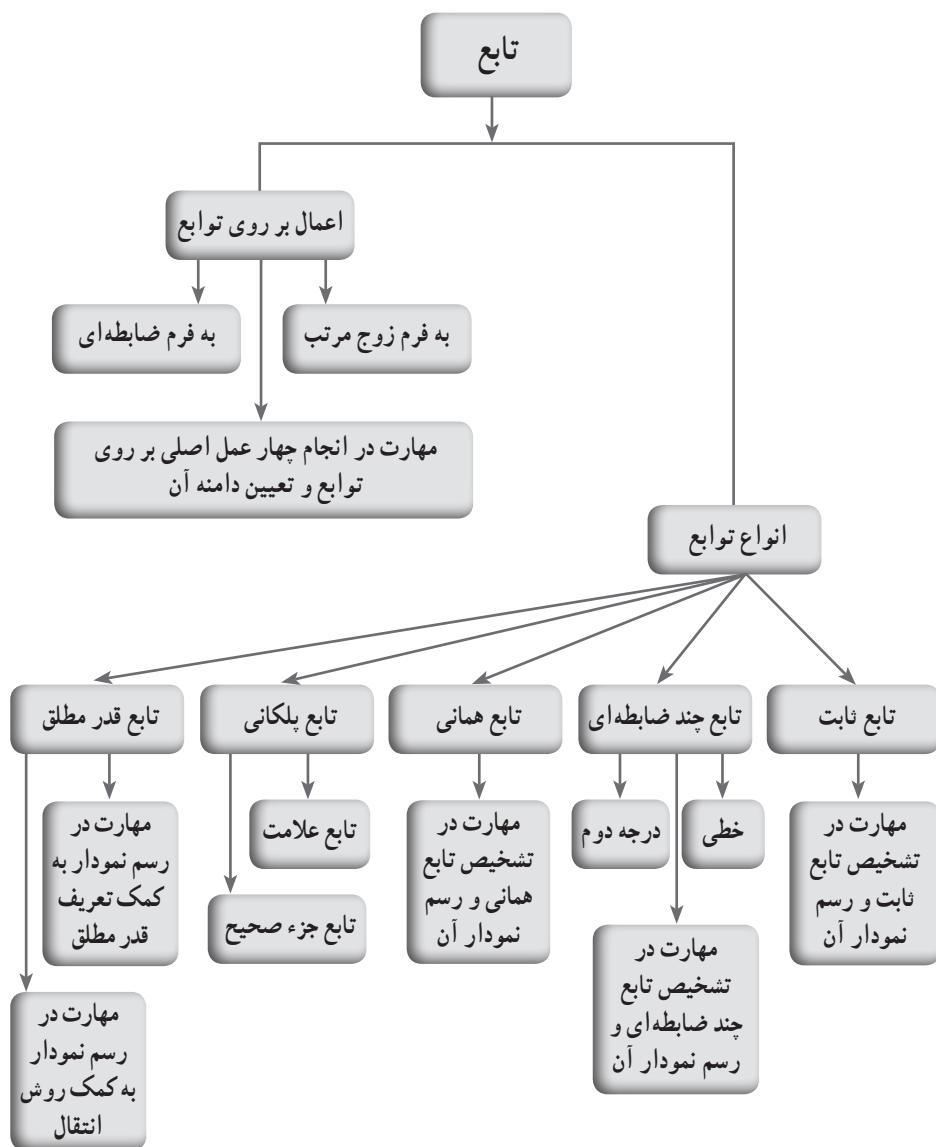
۲ شناخت این توابع در مسائل واقعی و کاربردهای آنها؛

۳ مدل‌سازی مسائل واقعی و تفسیر نمودار توابع و ارتباط آنها با دنیای واقعی؛

۴ نگاه علمی به حل مسائل؛

۵ آشنایی با روش «حل مسئله» و طرح مسائل «باز پاسخ»؛

۶ آشنایی با چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم میان توابع.



## تاریخچه مختصر حل مسئله

سال ۱۹۴۵ میلادی را می‌توان نقطه عطفی در تاریخ حل مسئله به‌شمار آورد. در این سال، اثر بزرگ جورج پولیا<sup>۱</sup> به‌نام «چگونه مسئله را حل کنیم» منتشر شد که منشأ تحول عظیمی در آموزش ریاضی، به‌ویژه در دوره‌های آموزش عمومی در سطح جهان گشت.

آموزش ریاضی و حل مسئله، کم و بیش مورد توجه آموزشگران ریاضی بوده است، هرچند نمی‌توان شروع دقیقی را برای آموزش ریاضیات ذکر کرد، اما شاید بتوان سقراط را اولین کسی دانست که با این روش، به آموزش مفاهیم ریاضی پرداخت. تأثیر سقراط بر حل مسئله ریاضی به‌حدی بود که به گفته پولیا بر «روش حل مسئله»، نام «روش سقراطی» نیز نهادند.

## حل مسئله به‌عنوان استراتژی در تدریس

استراتژی حل مسئله از دیدگاه جورج پولیا در چهار مرحله زیر صورت می‌گیرد :

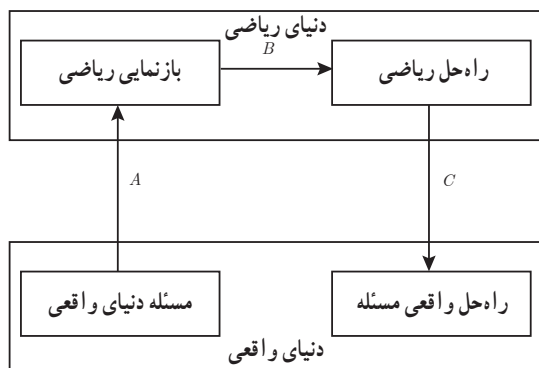
- ۱ درک و فهم مسئله. (در مسئله چه چیز خواسته شده است؟)
  - ۲ شناخت عمیق‌تر مسئله و طراحی نقشه. (اجزای مختلف مسئله چگونه به‌هم پیوسته‌اند و ارتباط مجهول با داده‌های مسئله از چه قرار است؟)
  - ۳ اجرای نقشه برای حل مسئله. (این مرحله در گرو اجرای درست مراحل ۱ و ۲ است. در حقیقت، کار عمده در حل مسئله، دست یافتن به تصور اندیشه‌ای درباره نقشه و اجرای آن است.)
  - ۴ دوباره نگری (بازگشت به عقب) و کنترل اجرای صحیح نقشه.
- مرحله دوباره‌نگری پولیا، شامل فعالیت‌هایی مانند این موارد است : تصدیق نتیجه، جست‌وجو برای روش‌های بدیل حل‌ها، مشخص ساختن اعتبار یک بحث، به‌کار بستن نتیجه یا راه‌حل مسئله در مسئله‌های دیگر، تفسیر نتیجه، تعمیم راه‌حل‌ها و تولید مسئله‌های جدید برای حل.
- شاید مهم‌ترین جنبه تدریس حل مسئله، دوباره نگری باشد؛ زیرا برای دانش‌آموزان، فرصت یادگیری را درباره فرایندهای حل مسئله و اینکه مسئله چگونه با سایر مسئله‌ها مرتبط است، ایجاد می‌کند.

## مدل ساده‌ای از فرایند حل مسئله ریاضی

در این مدل فرایند حل مسئله دارای سه گام است :

گام اول با مسئله‌ای شروع می‌شود که در قالب جملاتی از واقعیت فیزیکی روزانه قرار دارد. مسئله





حل کن ابتدا در جهت  $A$ ، مسئله را به جملات انتزاعی ریاضی ترجمه می کند؛ یعنی یک بازنمایی ریاضی برای مسئله پیدا می کند. سپس از طریق این بازنمایی (در جهت  $B$ ) به یک حل ریاضی برای مسئله می رسد. سرانجام آن راه حل را از طریق  $C$ ، به مسئله اصلی برمی گرداند.

### نمونه سؤال های ارزشیابی

۱ اگر  $f = \{(-2, 1), (3, 4), (2, -5), (1, 1)\}$  و  $g = \{(5, -2), (3, -7), (1, 0)\}$  باشد، آن گاه مجموعه های  $f+g$  و  $f-g$  و  $f \cdot g$  و  $\frac{f}{g}$  را بیابید.

۲ اگر  $f = \{(-3, 1), (5, -2), (2, 2)\}$  و  $g = \{(5, 1), (1, -1), (2, -5)\}$  باشد، آن گاه مجموعه های  $f-3g$  و  $5f-2g$  و  $(-2f) \cdot (-4g)$  و  $\frac{5f}{2g}$  را بیابید.

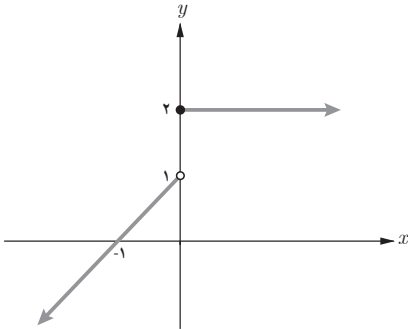
۳ اگر  $f(x) = \begin{cases} 7 & x \geq 2 \\ -6 & x < 2 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} -3 & x \geq 2 \\ 5 & x < 2 \end{cases}$  باشد، مقدار عبارت  $(f+g)(3) + (f-g)(-2)$  را بیابید.

۴ اگر  $f(x) = \sqrt{x-5} + 3$  و  $g(x) = \sqrt{5-x} + 7$  باشد، مقدار  $(f \cdot g)(5)$  را حساب کنید.

۵ اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \geq 1 \\ 4x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$  باشد، مقدار  $f(\sqrt{3}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$  را بیابید.

۶ اگر  $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & x \geq 1 \\ ax - 1 & x < 1 \end{cases}$  و  $f(-3) = 5$  باشد، مقدار  $f(a)$  را حساب کنید.

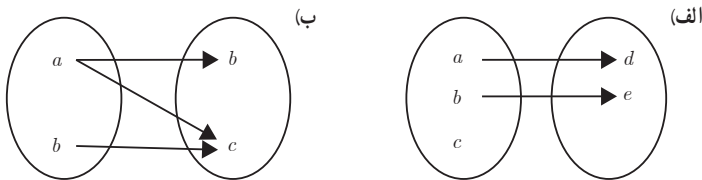
۷ ضابطه نمودار تابع مقابل را بنویسید.



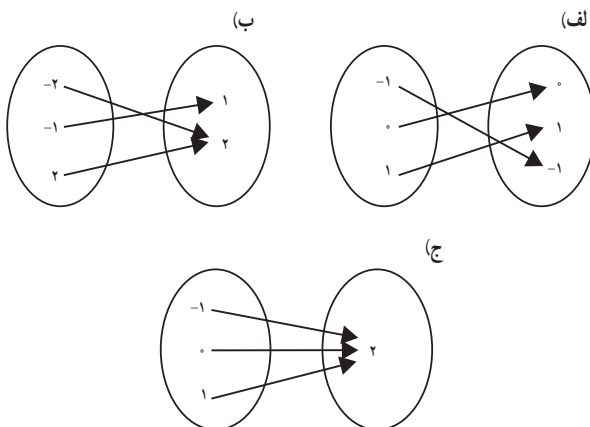
۸ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -2x & 0 \leq x < 2 \\ x + 3 & x \geq 2 \end{cases}$$

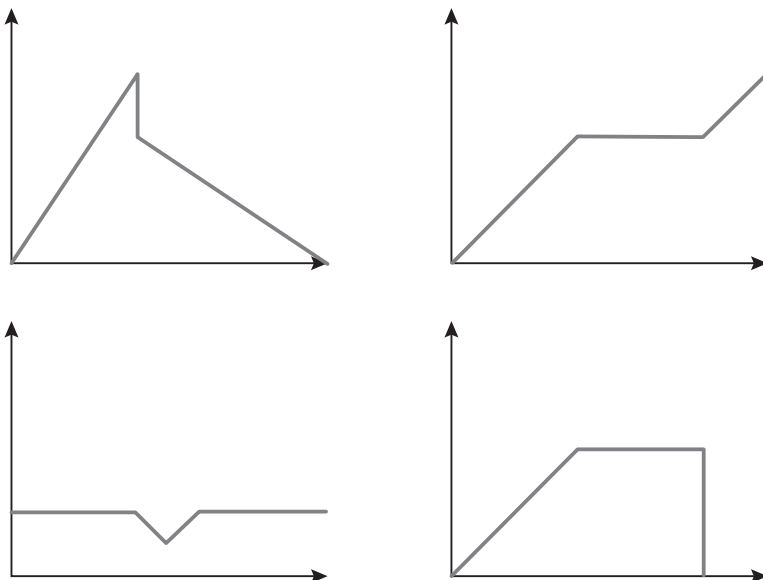
۹ علت تابع نبودن نمودارهای پیکانی زیر را بیان کنید.



۱۰ نوع هریک از توابع زیر را مشخص کنید. (ثابت، همانی، قدر مطلق)



۱۱ الف) کدام یک از نمودارهای زیر معرف یک تابع هستند؟ چرا؟  
ب) برای نمودارهایی که تابع هستند، یک داستان بنویسید.



۱۲ در تابع با ضابطه  $f(x) = 5x^2 + kx - 7$ ، اگر  $f(2) = 19$  باشد، مقدار  $k$  را حساب کنید.

۱۳ اگر  $f(x) = mx^2 - (m+3)x + m - 5$  باشد، مقدار  $m$  را چنان بیابید که  $f(-1) = 4$ .

۱۴ نمودار تابع زیر از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

$$f(x) = -|x - 2| + 2$$

$$g(x) = |x + 4| - 3$$

۱۵ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = -1 - |x + 2|$$

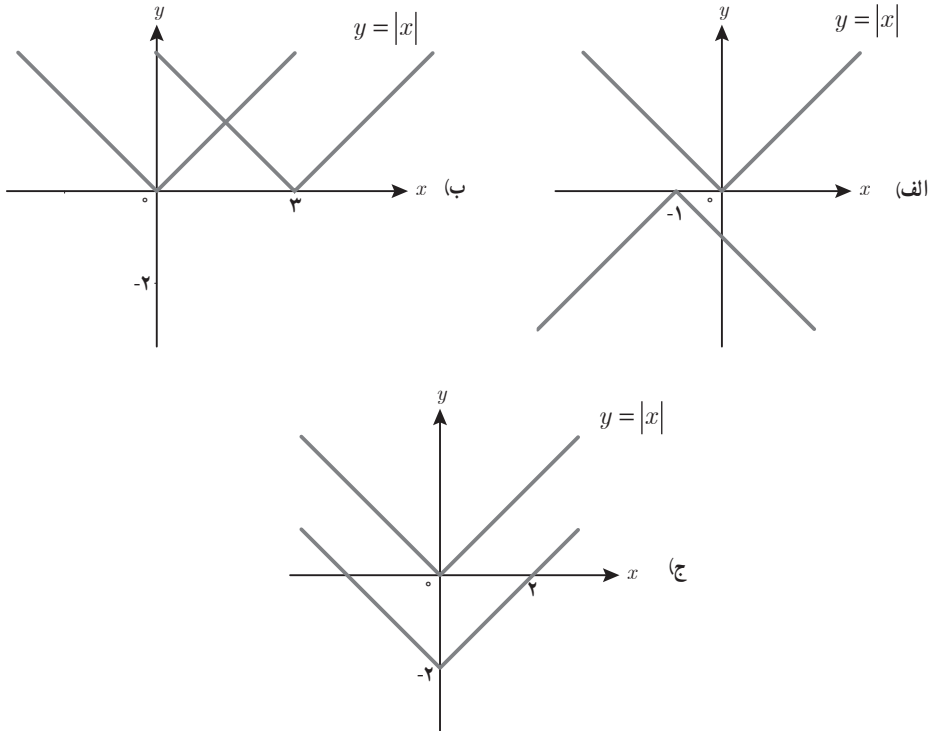
$$g(x) = |x - 3| + 2$$

$$h(x) = |5x - 2|$$

$$u(x) = -|4x + 3|$$

$$v(x) = |2x + 1| - 3$$

۱۶ در شکل‌های زیر، علاوه بر نمودار تابع  $y = |x|$ ، انتقال‌هایی از آن داده شده و نمودار دیگری رسم شده است. ضابطه تابع هر نمودار را بنویسید.



۱۷ اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{(a+b)x^2 - bx}{x+2}$ ،  $x \neq -2$ ، همانی باشد، حاصل  $a^2 - ab$  را به دست آورید.

۱۸ اگر تابع با ضابطه  $f = \{(-1, x+2y), (0, 3), (2, -x+y)\}$  ثابت باشد، مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید.

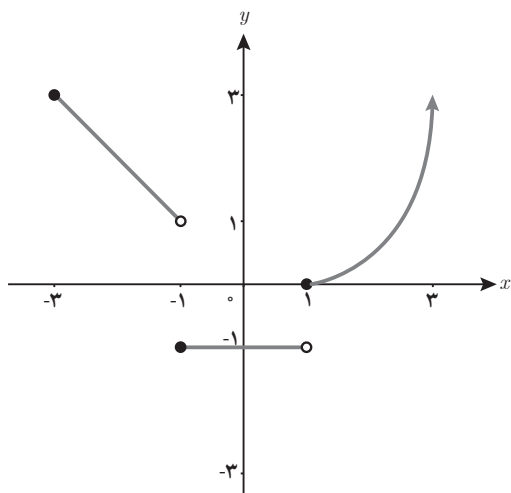
۱۹ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) اگر  $f(x) = 3x - 2$  باشد، آن گاه  $f(2) = \frac{f(1)}{4}$ .

(ب) دامنه تابع ثابت  $f(x) = -1$ ، مجموعه اعداد حقیقی است.

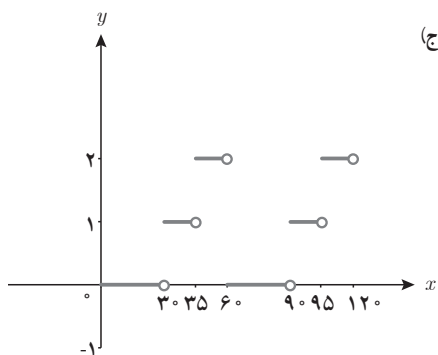
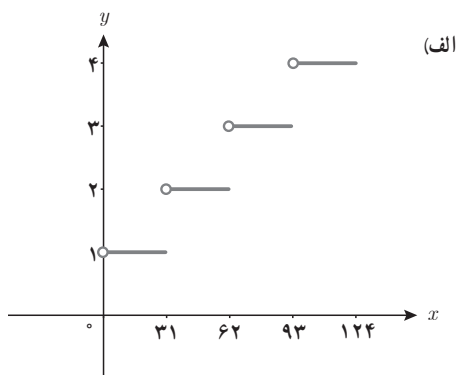
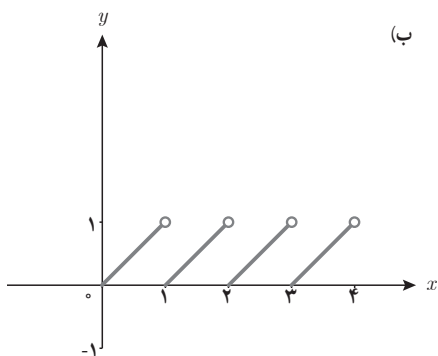
(ج) تابع همانی، تابعی است که برد آن شامل یک عضو است.

(د) اگر دامنه یک تابع ثابت، مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن گاه حاصل  $f(x) - f(-x)$  برابر صفر است.



۲۰ نمودار تابع چند ضابطه‌ای  $f$  داده شده است. ضابطه آن را بنویسید، سپس مقادیر  $f(0)$  و  $f(-\frac{3}{2})$  و  $f(2)$  را به دست آورید.

۲۱ کدام یک از توابع زیر پلکانی هستند؟ چرا؟



۲۲ به ازای  $x = \frac{1}{4}$ ، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$[x - 3] =$$

$$[-5x] =$$

$$[4x + 1/1] =$$

$$[x] + [-x] =$$

$$\sqrt{x - [x]} =$$

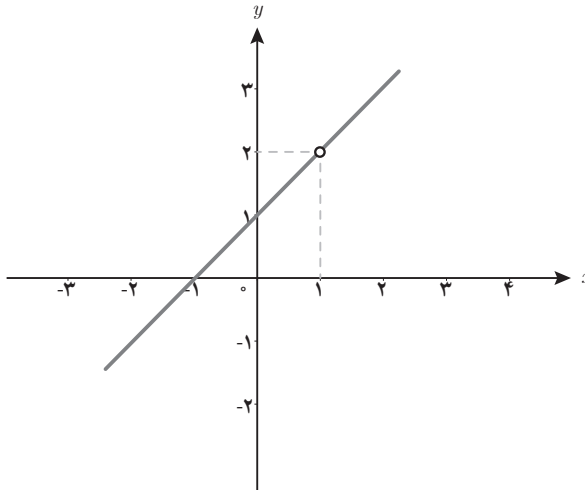
۲۳ نمودار توابع  $f(x) = |\frac{1}{4}x|$  و  $f(x) = |x|$  و  $f(x) = |2x|$  را در دستگاه مختصات رسم کرده و با یکدیگر مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲۴ برای هر تابع داده شده، ضابطه توابع  $f+g$  و  $f-g$  و  $\frac{f}{g}$  را به همراه دامنه آنها مشخص کنید.

الف)  $f(x) = x^2 - x + 3$  و  $g(x) = 1 - x^2$

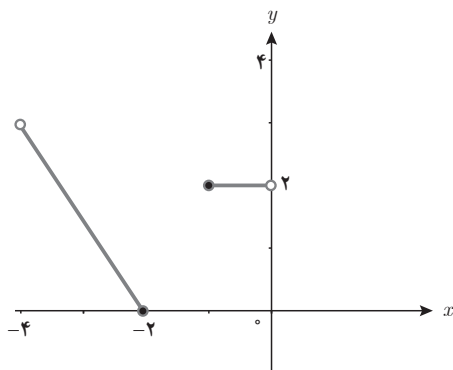
ب)  $f(x) = \frac{1}{x+3}$  و  $g(x) = x - 2$

۲۵ اگر  $g(x) = x^2 - 1$  و نمودار تابع  $(\frac{g}{f})(x)$  به صورت زیر باشد، ضابطه تابع  $f(x)$  را به دست آورید.

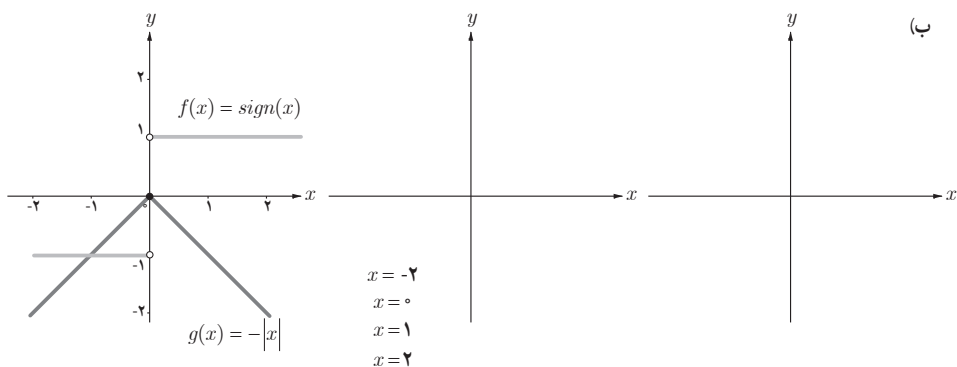
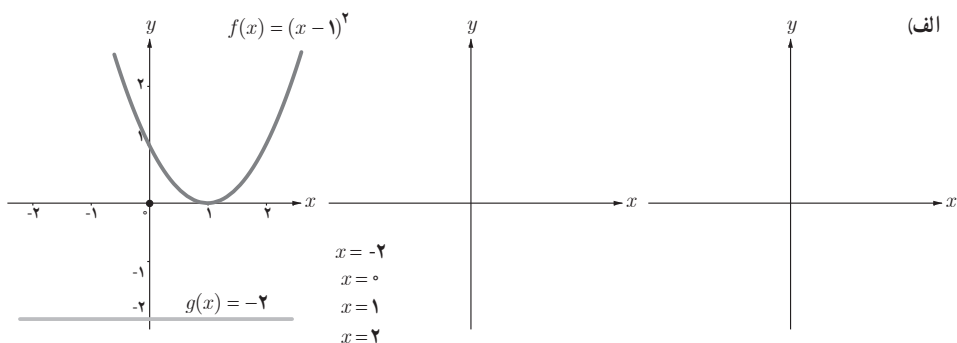


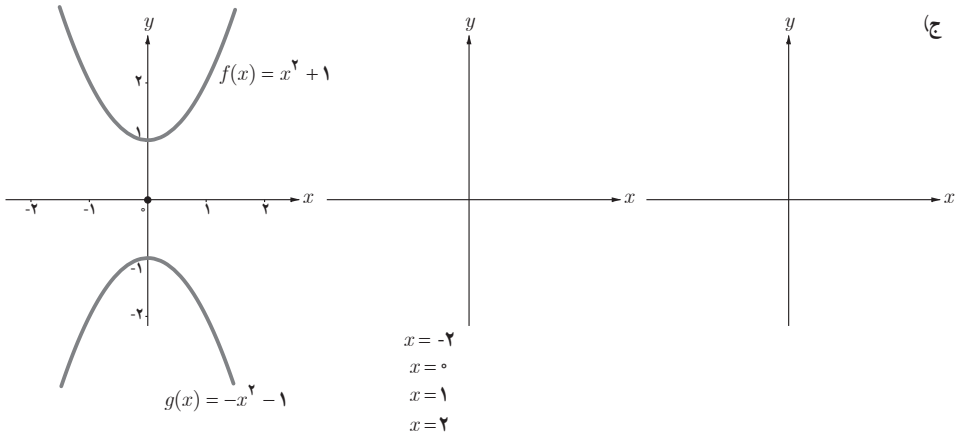
۲۶ ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 0 \\ 2 & \dots\dots \\ \dots\dots & -4 < x \leq -2 \end{cases}$$



۲۷ به کمک نمودارهای رسم شده توابع  $f$  و  $g$ ، نمودار تابع  $f + g$  را ابتدا در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع  $f + g$  را به کمک ضابطه آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.





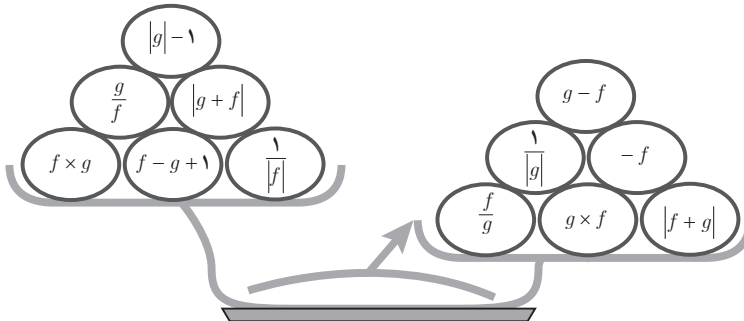
۲۸ تابع  $f(x) = |x - 2|$  با دامنه  $-3 < x \leq -1$  و تابع  $g(x) = [x] - 2$  با دامنه  $-1 < x \leq 2$  را در نظر بگیرید. نمودار تابع  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  را رسم کنید.

۲۹ در هر یک از زوج مرتب‌های زیر،  $n \in \mathbb{N}$  را به گونه‌ای تعیین کنید که زوج مرتب داده شده روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم باشد.

$$(4, n^2 - 7n + 8)$$

$$(-3n + 4, n^2 - 2n + 2)$$

۳۰ ضابطه توابع  $f(x) = x^2 - x - 2$  و  $g(x) = x - 2$  را در نظر بگیرید. مقادیر توابع وزنه‌های روی کفه‌های ترازو را به ازای  $x = 1$  حساب کنید. چرا کفه سمت راست ترازو سنگین‌تر است؟





۳۱ جدول زیر میزان «کیلو وات ساعت» برق مصرفی یک خانه را در سی روز نشان می‌دهد. نمودار پلکانی هزینه برق (ریال) را برحسب مصرف سی روزه (کیلو وات ساعت) رسم کنید و به کمک آن، مقدار هزینه کل برق مصرفی این خانه را محاسبه کنید.

پله‌های مصرف ۳۰ روزه	نرخ (ریال)	مصرف ۳۰ روزه	مبلغ ۳۰ روزه
مصرف ۰ تا ۱۰۰	۴۰۲	۱۰۰	۴۰۲۰۰
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۵۰	۱۰۰	۵۵۰۰۰
مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۱۱۴۰	۷۶/۱۳	۸۶۷۷۹
مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰	۲۲۹۰	۰	۰
مازاد بر ۴۰۰ تا ۵۰۰	۲۷۹۰	۰	۰
مازاد بر ۵۰۰ تا ۶۰۰	۳۷۰۰	۰	۰
مازاد بر ۶۰۰	۴۱۰۰	۰	۰

۳۲ اگر هزینه پارکینگ فروشگاهی، در یکی از روزهای ماه مرداد، براساس مدت زمان سپری شده از لحظه بازگشایی فروشگاه از ساعت ۷ صبح، از تابع زیر پیروی کند، (ساعت کار این فروشگاه از ۷ صبح تا ۹ شب است) با رسم نمودار تابع، هزینه پارکینگ هر خودرو را، با توجه به ساعت و زمان ورودش به پارکینگ، به کمک نمودار تابع محاسبه کنید (هر واحد بر روی محور  $y$  ها معادل ۱۰۰۰ تومان است).

$$c(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2}(x-1) & 3 \leq x < 7 \\ 0 & 7 \leq x < 10 \\ \frac{x}{2} - 2 & 10 \leq x \leq 14 \end{cases}$$

۳۳ با توجه به مشخصه محورهای  $x$  و  $y$  در دستگاه مختصات، برای حالت زیر، نوع تابع را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.  
 «در روز کتاب و کتابخوانی، در یک مدرسه، علی، محمد، رضا و حسین هر کدام یک کتاب به کتابخانه مدرسه هدیه دادند.»

تعداد کتاب

نام دانش آموز

## توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی

### اهداف درس اول

- ۱ یادآوری مفاهیم تابع، دامنه و برد و روش‌های مختلف نمایش تابع؛
- ۲ معرفی تابع‌های ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی و شناخت آنها در مسائل واقعی؛
- ۳ تأثیر و توجه به دامنه تابع در رسم نمودار تابع؛
- ۴ تشخیص متغیر مستقل و وابسته در هر مسئله با توجه به واحدهای معرفی شده برای محورهای مختصات؛
- ۵ مهارت مدل‌سازی مسائل واقعی به کمک تابع و مهارت تحلیل نمودار یک تابع با مسائل واقعی؛
- ۶ آشنایی با روش «حل مسئله»؛
- ۷ ارتباط و کاربرد شاخه‌های گوناگون دانش ریاضی با یکدیگر، مانند ارتباط آمار و تابع.

### روش تدریس

موضوع «فعالیت» و «کار در کلاس» اول، مفاهیم تابع و دامنه و برد آن است که برای یادآوری مطالب کتاب سال دهم آورده شده است. در کار در کلاس صفحه ۲۳، سؤال مرتبط با دروس ادبیات و جغرافی رشته علوم انسانی طرح شده است و هدف، ارتباط دادن درس ریاضی با دروس دیگر است که می‌تواند موجب افزایش رغبت یادگیری در دانش‌آموز شود. هدف از تمرین ۲ قسمت دوم در صفحه ۲۴ کتاب یافتن ضابطه تابع است. دانش‌آموز می‌تواند از دو مجموعه سه عضوی دامنه و برد، به دلخواه، دو نقطه انتخاب کند و ضابطه تابع خطی آن را بنویسد؛ مثلاً اگر دو نقطه  $(0,0)$  و  $(2,6)$  را در نظر بگیرد، در این صورت ضابطه تابع به صورت  $f(x) = 3x$  خواهد بود. هدف از این تمرین، یادآوری مطالب سال گذشته است تا دانش‌آموزان، با کمک ضابطه و دامنه تابع، برد آن را بیابند و سپس نمودار تابع را رسم کنند. برای معرفی تابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی، از مسئله پارکینگ استفاده شده است که مدلی از مسئله کاربردی و واقعی است. در ابتدای این مسئله بیان شده که مدیران این فروشگاه، براساس اطلاعات ورودی خودروها

به پارکینگ، برای هزینه حاصل از آن تصمیم گرفته‌اند. به دلیل تغییرات کم از روز شنبه تا چهارشنبه و تغییرات زیاد در دو روز پایانی، از دو یا سه مدل ریاضی استفاده شده است. مدل برای روز شنبه تا چهارشنبه این گونه است که مطابق جدول ۲، هزینه پارکینگ، با توجه به میانگین خودروهای ورودی، دریافت می‌شود و با استفاده از آن، تابع ثابت و تابع چند ضابطه‌ای معرفی شده است. همچنین در زیرنویس معرفی تابع ثابت، نوشته شده است که میانگین ورودی خودرو در اولین هفته تغییر محسوسی نکرده است. چون میانگین ورود ماشین از شنبه تا چهارشنبه بالای ۷۰۰ نبوده، دلیلی برای نوشتن هزینه برای ۷۰۰ به بالا وجود نداشته است. مدل روز پنجشنبه برای معرفی تابع همانی است. در توضیح این مدل، نوشته شده است که، به دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی در این روز، مدیران فروشگاه تصمیم گرفتند از یک مدل تابع خطی استفاده کنند که تابع همانی است.

در «کار در کلاس» صفحه ۲۶ و «فعالیت» صفحه ۲۷، رسم نمودار تابع خواسته شده است. هدف از آن، مهارت یافتن دانش‌آموزان در تشخیص این امر است که نمودار تابع چه موقع به صورت نقطه‌ای و چه موقع به صورت خطی رسم می‌شود. در نمودار «کار در کلاس» صفحه ۲۶، مشخصه محور  $x$  ها برحسب  $n$  امین ساعت است، که در اینجا واحد زمان مشخص و برحسب ساعت است و واحدهای دیگر زمان را شامل نمی‌شود؛ بنابراین، در رسم نمودار، ساعت به ساعت را به صورت نقطه به نقطه رسم می‌کنیم. در نمودار «فعالیت» صفحه ۲۷، مشخصه محور  $x$  ها برحسب مدت زمان است که می‌تواند برحسب ساعت یا واحدهای کوچک‌تر زمان باشد؛ پس شامل همه واحدهای زمان است و نمودار آن به صورت خطی رسم می‌شود.

در قسمت ۱ «کار در کلاس» صفحه ۲۸، نمودار تابع با توجه به مشخصه محور  $x$  ها که برحسب  $n$  امین ساعت است، به صورت نقطه‌ای رسم می‌شود. در قسمت ۲، با توجه به ضابطه تابع و اطلاعات جدول ۱ در روز چهارشنبه، درآمد توقفگاه فروشگاه به صورت زیر خواهد بود:

$$500 \times 180 + 1000 \times 270 + 1500 \times 350 + 2000 \times 490 + 2500 \times 570 + 3000 \times 680 = 5330000$$

در قسمت ۱ «فعالیت» صفحه ۲۹، مفهوم قسمت‌هایی که نمودار تابع ثابت است، توقف قطار در ایستگاه را نشان می‌دهد.

$$f(x) = \begin{cases} 450 & 4/5 \leq x < 5 \\ 150x - 300 & 5 \leq x < 7/5 \\ 825 & 7/5 \leq x < 8 \end{cases} \quad \text{قسمت ۲،}$$

$$150x - 300 = 945 \rightarrow x = 8/3 \rightarrow x = 8 + \frac{3}{10} \times 60 = 8:18' \quad \text{و قسمت ۳،}$$

## توصیه آموزشی

یکی از مفاهیم بسیار مهم در آموزش ریاضی به دانش‌آموزان، یادگیری مفهوم یادگیری واحدهای محورهای مختصات است که در کتاب NCTM، به وضوح، به آن اشاره شده است. یکی از اهداف مهم تمرین ۱ صفحه ۳۱ کتاب، علاوه بر درک بیشتر دانش‌آموزان از انواع توابع مانند تابع ثابت و... و درک این نکته است که در زندگی روزمره نیز، به سادگی، با این مفاهیم در ارتباط هستیم. توصیه مهم، شناخت و تأکید بر معرفی محور  $x$  ها و محور  $y$  ها است؛ یعنی دانش‌آموزان توجه کنند که هر دو محور مختصات چه مفهومی را مطرح می‌کند؛ مثلاً در قسمت الف، با توجه به توضیح سؤال، زمانی که محور  $x$  ها، تعداد دانش‌آموزان و محور  $y$  ها، تعداد نهال تعیین شده است، نمودار آن، یک تابع همانی را نشان می‌دهد؛ زیرا نقاط نمودار براساس یک دانش‌آموز، یک نهال، دو دانش‌آموز، دو نهال و... مشخص می‌شوند. حال در نظر بگیرید در همین قسمت الف، نامگذاری محور  $x$  ها را براساس نام دانش‌آموز تغییر دهیم. در این حالت، برای نام هر یک از دانش‌آموزان، یک درخت مشخص می‌شود؛ مثلاً علی یک درخت، احمد یک درخت و... که نمایش نمودار آن، تابع ثابت را مشخص می‌کند. این، مفهومی است که معلمان به سلیقه خود می‌توانند در کلاس به آن بپردازند.

## اشتباهات رایج دانش‌آموزان

یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، مربوط به تشخیص رسم نمودار به صورت نقطه‌ای یا خطی است؛ زیرا:

- ☐ به تأثیر دامنه در رسم نمودار تابع توجه ندارند؛
- ☐ در نمودار توابع، به مشخصه‌ای که برای محور  $x$  ها و محور  $y$  ها تعیین شده است، دقت نمی‌کنند.

# توابع پلکانی و قدر مطلق

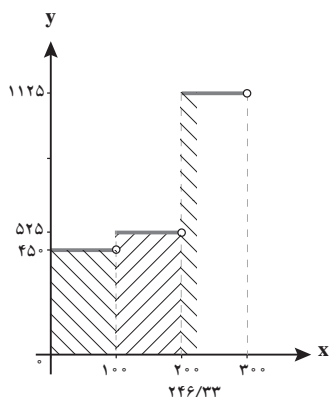
درس دوم

## اهداف درس دوم

- ۱ معرفی تابع پلکانی و شناخت آن در مسائل واقعی؛
- ۲ مفهوم سطح زیر نمودار یک تابع با توجه به متغیر مستقل و وابسته؛
- ۳ معرفی تابع جزء صحیح و رسم آن؛
- ۴ معرفی تابع قدر مطلق و کاربرد آن برای توصیف و تحلیل دقیق و علمی مسائل پیرامون؛
- ۵ تبدیل تابع قدر مطلق به دو ضابطه و برعکس؛
- ۶ مدل سازی مسائل واقعی به کمک تابع پلکانی و تابع قدر مطلق؛
- ۷ رسم نمودار توابع قدر مطلق.

## روش تدریس

برای معرفی تابع پلکانی، از مسئله قبض برق استفاده شده و جدول مربوط به آن، یک نمونه واقعی از قبض برق را



نشان می دهد. در فعالیت صفحه ۳۵، به کمک نمودار پلکانی رسم شده، هزینه برق مصرفی یک خانه خواسته شده است. قسمت ۱، هزینه ۱۰۰ کیلووات برابر  $4500 = 100 \times 450$  است و قسمت ۲، مساحت قسمت هاشور خورده، بیانگر هزینه مصرف ۱۰۰ تا ۲۰۰ کیلووات ساعت است. قسمت ۳، با توجه به مساحت هاشور خورده نمودار زیر، هزینه کل برق مصرفی خانه برابر  $100 \times 450 + 100 \times 525 + 46/23 \times 1125 = 149508/75$  است.

هدف از طرح این مسئله، مهارت یافتن دانش آموزان در

محاسبه مسائل واقعی (مانند محاسبه هزینه برق خانه در یک ماه) است و اینکه نمودار هزینه برق مصرفی خانه در سی روز به صورت پلکانی است.

سؤال ۱ «کار در کلاس» صفحه ۳۶ یک مدل ریاضی برحسب تعداد روزها در ماه‌های سال است که یک تابع دوازده ضابطه‌ای است. حل سؤال ۲ قدمی در جهت درک مدل سازی مسائل واقعی محیط پیرامون به کمک علم ریاضی است و هدف از آن نیز مهارت یافتن دانش‌آموزان در تشخیص نوع نمودار تابع در توصیف یک پدیده واقعی است. نمودار تابع اول، مربوط به چراغ راهنمایی و رانندگی سه حالتی است. محور  $x$  ها بیانگر زمان و محور  $y$  ها بیانگر تعداد رنگ چراغ راهنمایی است. در صورت مسئله چراغ سه حالتی، به هر کدام از حالت‌ها یک عدد نسبت می‌دهیم. بدیهی است که عدد نسبت داده شده اهمیتی ندارد و نکته مهم، نسبت دادن سه حالت قرمز، زرد و سبز به سه عدد حقیقی است. نمودار تابع دوم، مربوط به ساعت شنی است. وقتی شن با سرعت ثابت در درون مخروط می‌ریزد، حجم شن در هر دقیقه اضافه می‌شود. واضح است که حجم شن درون مخروط، تابع خطی برحسب زمان است. نمودار تابع سوم، مربوط به پرندۀ داخل ساعت است؛ پرندۀ ای که فقط رأس هر ساعت بیرون می‌آید و در بقیه زمان‌ها، درون ساعت است. ذکر این نکته مهم است که در این تمرین، علاوه بر توجه به مفهوم محور  $x$  ها در هر حالت، باید به مفهوم برد تابع، یعنی مجموعه مقادیری که  $y$  اختیار می‌کند توجه کنیم. دقت به خروجی هریک از مثال‌های مطرح شده، با توجه به توضیحات سمت راست در کنار هر شکل، مشخص می‌کند که مثلاً در شکل دوم، تنها دو حالت برای پرندۀ وجود دارد: درون ساعت و بیرون ساعت؛ یعنی برد تابع، تنها شامل دو عدد حقیقی است. در مثال چراغ راهنمایی و رانندگی نیز، با گذر زمان یعنی دامنۀ رنگ چراغ، یعنی برد، سه حالت دارد: سبز، زرد و قرمز که می‌تواند با سه عدد حقیقی مشخص شود؛ بنابراین، در این حالت گزینه‌ای صحیح است که برد تابع آن شامل سه جواب باشد. با همین روش، یعنی توجه به جواب تابع، نمودار تابع مربوط به ساعت شنی نیز مشخص می‌شود. به‌طور خلاصه یکی از اهداف مهم این تمرین، بررسی مفهوم برد تابع و نقش آن در تفسیر نمودار تابع است.

برای آشنایی دانش‌آموزان با تابع جزء صحیح، فعالیتی مطرح شده است تا دانش‌آموزان، با تعیین مکان عدد بر روی نمودار، به درک بهتری از مفهوم جزء صحیح برسند.

در «فعالیت ۱» صفحه ۴۰ کتاب برای آشنایی دانش‌آموزان با تابع قدر مطلق، مسئله‌ای در مورد وزن استاندارد مطرح و نمودار آن با توجه به مفهوم مسئله، رسم شده است. با نتیجه‌گیری از آن و تفسیر جواب، به تعریف تابع قدر مطلق می‌رسیم. در صفحه ۴۱ «فعالیت ۲» مسئله، مربوط به افتتاح یک پل روی رودخانه سیمینه‌رود در استان آذربایجان غربی است. یکی از اهداف طرح این مسئله، بیان اهمیت محیط زیست کشور است. همچنین تصویر زمینه شروع فصل تابع، مرتبط با همین مسئله انتخاب شده است. در قسمت الف،

نمودار تابع جریمه برحسب زمان به صورت نقطه ای رسم می شود؛ زیرا در مسئله ذکر شده، تحویل این پروژه به ماه تحویل بستگی دارد، نه به روز. قسمت ب، با توجه به نمودار، ضابطه تابع  $f(n) = |n - 4|$ ،  $n \in N$  است. در قسمت ج، اگر پیمانکار، چهار میلیون جریمه پرداخت کند، پروژه در ماه های آبان ۹۵ یا اسفند ۹۴ پایان می یابد؛ چون چهار ماه اختلاف با زمان تحویل پروژه دارند. پاسخ این پرسش به کمک نمودار داده شده و ضابطه تابع قدرمطلق به دست آمده، برای ماه آبان ۹۵،  $f(8) = |8 - 4| = 4$  و برای ماه اسفند ۹۴،  $f(0) = |0 - 4| = 4$  است.

در «کار در کلاس» همین صفحه، مشخصه محور  $x$  ها در نمودار تابع برحسب زمان تحویل است؛ یعنی در این سؤال تحویل پروژه به روز هم، بستگی دارد. در قسمت الف، اگر پروژه در ماه دوم تحویل داده شود، پیمانکار جریمه نمی شود، ولی به ازای هر زمان اختلاف با زمان تحویل پروژه، جریمه ای پرداخت می کند. در قسمت ب، ضابطه هر خط خواسته شده است. دانش آموزان براساس نمودار تابع، برای هر خط، دو نقطه انتخاب کرده، سپس شیب خط را حساب می کنند و معادله خط را می نویسند که به صورت  $y = -2x + 4$ ،  $x < 2$  و  $y = 2x - 4$ ،  $x \geq 2$  می نویسند. در قسمت ج، به کمک تعریف تابع قدرمطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه به صورت  $f(x) = |2x - 4|$  می نویسند. در قسمت د، شیب خط مثبت باشد، یعنی تأخیر در زمان تحویل پروژه و شیب خط منفی باشد، یعنی تحویل زودتر از موعد مقرر انجام شده است، که هر دو حالت موجب خسارت به صاحب کار (وزارت راه) است.

حل مسئله صفحه ۴۲ کتاب، در مورد نحوه رسم تابع قدرمطلق با توجه به تعریف قدرمطلق است. دانش آموزان پایه نهم با این تعریف آشنایی دارند. دانش آموزان ابتدا ضابطه تابع قدر مطلق را با توجه به تعریف قدر مطلق، به صورت تابع دوضابطه ای، می نویسند. سپس هر خط را براساس محدوده ای که دارد. رسم می کنند و به این طریق، نمودار تابع قدر مطلق رسم می شود در همین صفحه، هدف «کار در کلاس»، آموزش روش انتقال برای رسم نمودار قدرمطلق است. در قسمت الف، دانش آموز، نمودار تابع  $y = |x - 4|$  را با کمک تعریف قدر مطلق رسم می کند. در قسمت ب، مختصات قسمت الف، نمودار تابع  $y = |x|$  رسم می شود. در قسمت ج، از دانش آموزان خواسته شده تا نتیجه گیری خود را تشریح کنند. هدف از این سؤال، این است که دانش آموزان، برای رسم نمودار تابع، مراحل را طی کرده و سپس خودشان روش انتقال برای رسم نمودار تابع را نتیجه بگیرند و به درک بهتری برسند. برای قسمت د، دانش آموزان می توانند به کمک روش انتقال، نمودار را رسم کنند. برای قسمت ه نیز پیشنهاد می شود مثل مراحل رسم نمودار قسمت الف عمل شود تا دانش آموزان بعد از رسم نمودار، نحوه انتقال نمودار تابع  $y = |x|$  را با توجه به ضابطه تابع داده شده به خوبی درک کنند.

## توصیه آموزشی

هدف کتاب این است که نمودار تابع‌های قدرمطلق که به فرم  $y = |x| + k$  و  $y = |x - h|$  هستند، به کمک روش انتقال رسم شوند. همان‌طور که می‌دانید، برای رسم تابع قدرمطلق به فرم  $y = |x| + k$  کافی است نمودار تابع به اندازه  $k$  واحد در راستای عمودی جابه‌جا شود. اگر  $k > 0$ ، انتقال نمودار به سمت بالا و اگر  $k < 0$ ، انتقال نمودار به سمت پایین است و برای رسم تابع قدرمطلق به فرم  $y = |x - h|$  کافی است نمودار تابع به اندازه  $h$  واحد در راستای افقی جابه‌جا شود. اگر  $h > 0$ ، انتقال نمودار به سمت راست و اگر  $h < 0$ ، انتقال نمودار به سمت چپ است.

برای رسم نمودار تابع‌های قدرمطلق به فرم  $y = |ax + b|$ ، بهتر است آموزش از روش حل مسئله در صفحه ۴۲ کتاب، که کمک گرفتن از تعریف قدرمطلق می‌باشد، انجام گیرد. در این مبحث نمی‌خواهیم وارد قوانین قدر مطلق و جزء صحیح شویم. هدف درس تنها آشنایی با مفهوم این توابع است.

## اشتباهات رایج دانش‌آموزان

□ ممکن است برخی دانش‌آموزان، برای پیدا کردن جزء صحیح اعداد اعشاری منفی، بدون استفاده از محور اعداد، با مشکل مواجه شوند؛ یعنی عدد اعشاری منفی را میان دو عدد صحیح، متوالی، ولی جابه‌جا در نظر می‌گیرند؛ مثلاً برای پیدا کردن جزء صحیح عدد  $-3/2$ ، این عدد را بین اعداد  $-3$  و  $-4$  تصور می‌کنند، ولی به مکان این اعداد روی محور اعداد توجه نکرده، مقدار جزء صحیح را  $-3$  می‌نویسند.

□ ممکن است برای رسم نمودار تابع قدرمطلق از روش انتقال، جابه‌جایی نمودار در راستای افقی یا عمودی را اشتباه کنند.



## اعمال بر روی توابع

درس سوم

### اهداف درس سوم

- ۱ آشنایی با تعیین دامنه در اعمال میان توابع؛
- ۲ آشنایی با اعمال میان توابع به کمک ضابطه توابع؛
- ۳ آشنایی با اعمال میان توابع به کمک زوج مرتب‌ها و رسم نمودار آنها؛
- ۴ نگاه علمی به حل یک مسئله در خانواده و اجتماع.

### روش تدریس

این درس با فعالیتی شروع شده که دانش‌آموزان با حل آن، به راحتی مفهوم جمع دو تابع را، با توجه به دامنه اشتراکشان، درک خواهند کرد. هدف، درک معنادار مفهوم جمع دو تابع در مسائل واقعی است. در قسمت الف سؤال ۱ «کار در کلاس» صفحه ۴۷ کتاب، دانش‌آموزان ابتدا نمایش پیکانی را با توجه به جدول‌هایی که در فعالیت داده شده، نشان می‌دهند. در قسمت ب، به اشتراک سبک فیلم موردعلاقه هریک تأکید شده و هدف آن توجه دادن دانش‌آموزان به دامنه دو تابع، قبل از انجام عمل جمع میان آنهاست و پاسخ آن، تابع  $\{(18000 \text{ و علمی} - \text{تخیلی}) \text{ و } (18000 \text{ و اجتماعی})\}$  است. در قسمت ج چون در روز دوشنبه، علیرضا و مادرش به دیدن یک فیلم می‌روند، پس هزینه ۱۸۰۰۰ تومان است.

در قسمت الف از سؤال ۲، نمایش زوج مرتبی همه اعضای خانواده، به صورت زیر است :

$\{(30000 \text{ و اجتماعی}) \text{ و } (30000 \text{ و تاریخی}) \text{ و } (30000 \text{ و دفاع مقدس})\} = \text{پدر علیرضا}$

$\{(30000 \text{ و تاریخی}) \text{ و } (30000 \text{ و دفاع مقدس}) \text{ و } (30000 \text{ و کمدی})\} = \text{مادر علیرضا}$

$\{(24000 \text{ و تاریخی})\} = \text{علیرضا}$

$\{(15000 \text{ و تاریخی}) \text{ و } (15000 \text{ و کمدی})\} = \text{مریم}$

در قسمت ب، میزان هزینه علیرضا در این روز، برابر ۹۹۰۰۰ تومان است. هدف، ابتدا پیدا کردن

اشتراک دامنه‌ها است. در اینجا اشتراک علاقه همه اعضای خانواده، تئاتر سبک تاریخی است، و سپس جمع هزینه‌های بلیت هر چهار نفر برای تماشای تئاتر سبک تاریخی است.

در صفحه ۴۸ کتاب، با مطرح کردن پرسشی، از دانش‌آموزان خواسته شده تا یافته‌های خود از انجام فعالیت در مورد چگونگی شرایط جمع دو تابع را بنویسند. هدف، کسب مهارت دانش‌آموزان در توصیف و تجزیه و تحلیل است. سپس از نتیجه‌ای که از انجام فعالیت گرفته شده، به مفهوم جمع دو تابع می‌رسند. مثالی نیز از دو تابع به فرم زوج مرتبی آورده شده تا دانش‌آموزان با حل آن، مفهوم جمع دو تابع را بهتر درک کنند.

در صفحه ۴۹ کتاب، فعالیتی مطرح شده تا دانش‌آموزان با انجام آن، با اعمال تفریق، ضرب و تقسیم میان تابع نیز آشنا شوند. دو تابع به فرم ضابطه‌ای داده شده و دانش‌آموزان اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را انجام می‌دهند، سپس مقادیر توابع حاصل را به ازای  $x=2$  که نماد وزنه‌های کفه‌های ترازو هستند، به دست می‌آورند. دلیل برابری دو کفه ترازو این است که مجموع وزنه‌های هر دو کفه ترازو ۱۷ است. با مقایسه وزنه‌های دو کفه ترازو، نتیجه‌ای که از این پاسخ می‌گیریم این است که:

$$f_6 = f_1 \times f_7 = 9 \quad \text{و} \quad |f_4| = |f_1 - f_7| = 0 \quad \text{و} \quad f_v = \frac{f_1}{f_7} = 1 \quad \text{و} \quad f_8 = \frac{f_7}{f_1} = 1 \quad \text{و} \quad f_1 + f_7 = f_3 = 6$$

$$|f_7 - f_1| = |f_5| = 0$$

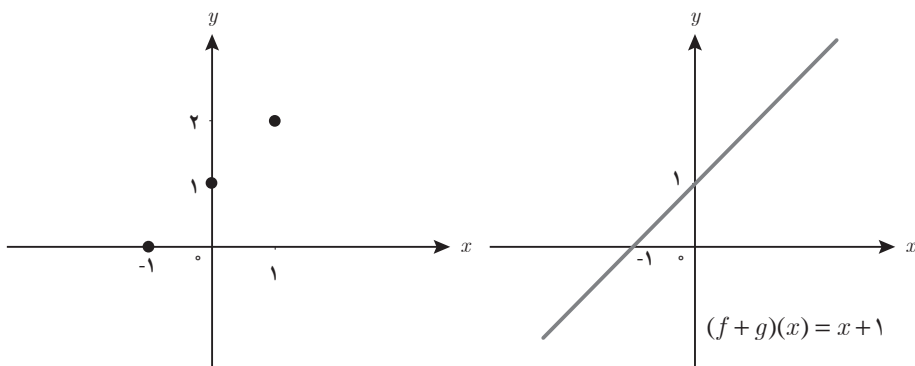
در سؤال ۱ «کار در کلاس» صفحه ۵۰ کتاب، دو تابع به صورت ضابطه‌ای آورده شده و دانش‌آموزان به ازای  $x=2$ ، مقادیر توابع در شکل نمودار درختی را حساب می‌کنند. هدف از طرح سؤال به این شکل، ایجاد افزایش علاقه برای دانش‌آموزان در انجام محاسبات است. در سؤال ۲، دو تابع به فرم زوج مرتبی داده شده و چهار عمل اصلی میان این دو تابع خواسته شده است. جواب‌ها به صورت زیر است:

$$f + g = \{(2, 5), (-1, 5)\}, \quad f \times g = \{(2, 0), (-1, 6)\}, \quad \frac{g}{f} = \left\{(-1, \frac{2}{3})\right\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{(2, 0), (-1, \frac{3}{2})\right\}, \quad f - g = \{(2, -5), (-1, 1)\}, \quad g - f = \{(2, 5), (-1, -1)\}$$

در فعالیت صفحه ۵۱ کتاب، نمودار دو تابع و ضابطه‌های آنها داده شده است. دانش‌آموزان، نمودار مجموع دو تابع را ابتدا به کمک نقاطی که معین شده و سپس به کمک ضابطه مجموع دو تابع، رسم می‌کنند. هدف، مهارت در رسم نمودار مجموع دو تابع است. دانش‌آموزان با رسم نمودار مجموع دو تابع، با استفاده از نقاط داده شده می‌توانند نمودار کلی مجموع دو تابع را حدس بزنند و نیز تأیید دامنه در رسم نمودار تابع را به خوبی درک کنند.

قسمت اول :

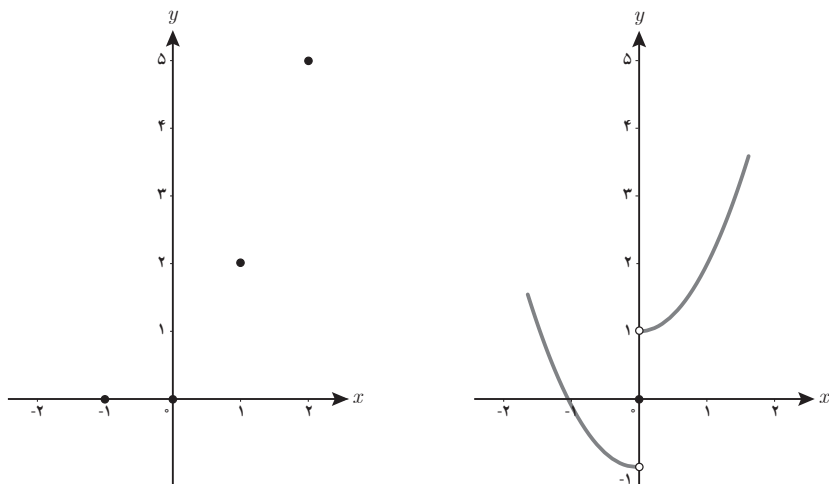


$$x = -1 \rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$x = 1 \rightarrow y = 2$$

قسمت دوم :



$$x = -1 \rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \rightarrow y = 2$$

$$x = 2 \rightarrow y = 5$$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ x^2 & x = 0 \\ x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

## توصیه آموزشی

آموزش روش حل مسئله به صورت مستقیم معنا ندارد و اثربخش نیست. پیشنهاد می شود معلمان، با راهنمایی های غیرمستقیم، دانش آموزان را متوجه استراتژی های حل مسئله کنند و با دقت و مهارت، بر فرایند قبل، ضمن و بعد از حل مسئله، نظارت داشته باشند. رویارویی دانش آموزان با مسئله از طریق تعامل و همفکری با معلم و هم کلاسی های خود، بعضی جنبه های حل مسئله را پرورش می دهد. در این درس، دامنه بعضی از توابع به صورت نامساوی داده شده است. همان طور که می دانید دانش آموزان در پایه نهم، با نمایش نامساوی ها روی محور اعداد آشنا شدند. برای پیدا کردن دامنه اشتراک توابع، کافی است روی محور اعداد، هریک از نامساوی ها را نشان داده و سپس ناحیه اشتراک را مشخص کنند.

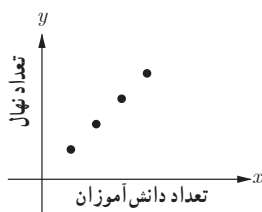
## اشتباهات رایج دانش آموزان

- برخی اشتباهات رایج دانش آموزان، در مبحث اعمال میان توابع، توجه نکردن به دامنه اشتراک آنها است.
- ممکن است برخی دانش آموزان، در رسم نمودار تابع دقت نکنند و نقطه ای که متعلق به دامنه توابع نیست را توخالی بگذارند.

## حل تمرینات برگزیده درس اول (صفحه ۳۱ کتاب)

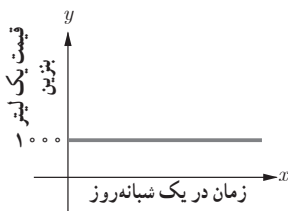
۱ با توجه به معرفی محور  $x$  و  $y$  در هر دستگاه مختصات، با هریک از توضیحات زیر کدام یک از توابع ثابت، چند ضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شود؟ نمودار هر حالت را با توجه به توضیحات کامل کنید.

الف) به مناسبت روز درخت‌کاری، در یک مدرسه هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد.



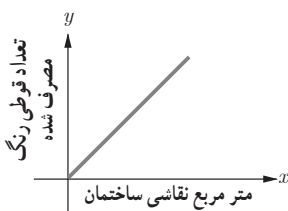
تابع همانی  $f(x) = x$  ,  $x \in \mathbb{N}$

ب) هزینه یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز در یک پمپ بنزین ۱۰۰۰ تومان است.



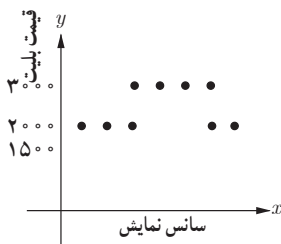
تابع ثابت  $f(x) = 1000$  ,  $x \geq 0$

ج) برای هر یک متر مربع نقاشی یک ساختمان، یک قوطی رنگ کوچک استفاده می‌شود.



تابع همانی  $f(x) = x$  ,  $x \in \mathbb{R}$

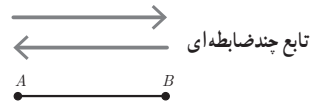
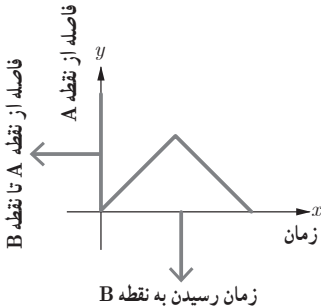
د) بلیت یک سینما در سه سانس اول ۲۰۰۰ تومان، در چهار سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است.



تابع چندضابطه‌ای

$$f(x) = \begin{cases} 2000 & x = 1, 2, 3 \\ 3000 & x = 4, 5, 6, 7 \\ 1500 & x = 8, 9 \end{cases}$$

ه) دوندۀ ای، کنار یک زمین فوتبال، با سرعت ثابت از نقطه  $A$  تا نقطه  $B$  شروع به دویدن می کند و دوباره به نقطه  $A$  برمی گردد.



۲) کدام یک از گزاره های زیر درست است؟ چرا؟

الف) اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است.

نادرست است. مثلاً تابع  $f = \{(1, 2), (2, 1)\}$  همانی نیست.

ب) اگر دامنه یک تابع همانی، مجموعه اعداد حقیقی باشد، آنگاه حاصل  $f(x) + f(-x)$  همواره برابر صفر است.

$$\begin{cases} f(x) = x \\ f(-x) = -x \end{cases} \rightarrow f(x) + f(-x) = x + (-x) = 0 \text{ زیرا درست است؛}$$

ج) اگر  $f$  یک تابع ثابت باشد، آنگاه  $f(kx) = kf(x)$ .

نادرست است؛ زیرا  $f(kx) = c \rightarrow f(x) = c$  تابع ثابت

۸) در هر یک از زوج مرتب های زیر  $n \in \mathbb{N}$  را به گونه ای تعیین کنید که زوج مرتب داده شده روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد.

$$(2, n^2 - 3n + 4)$$

$$n^2 - 3n + 4 = 2 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow (n-2)(n-1) = 0 \rightarrow n = 2, n = 1$$

$$(-1, n^2 - 4n + 2)$$

$$n^2 - 4n + 2 = -1 \rightarrow n^2 - 4n + 3 = 0 \rightarrow (n-3)(n-1) = 0 \rightarrow n = 3, n = 1$$

۹) اگر  $f$  یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی و  $n \in \mathbb{N}$  و  $m$  باشد، مقدار  $m+t$  را به دست آورید.

$$f = \{(-1, n^2 - 2n), (m-4, 3), (m+n, t)\}$$

$$t = 3$$

$$n^2 - 2n = 3 \rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \rightarrow (n-3)(n+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = -1 \notin \mathbb{N} \end{cases} \times$$

$$n = 3, t = 3 \rightarrow f = \{(-1, 3), (m-4, 3), (m+3, 3)\}$$

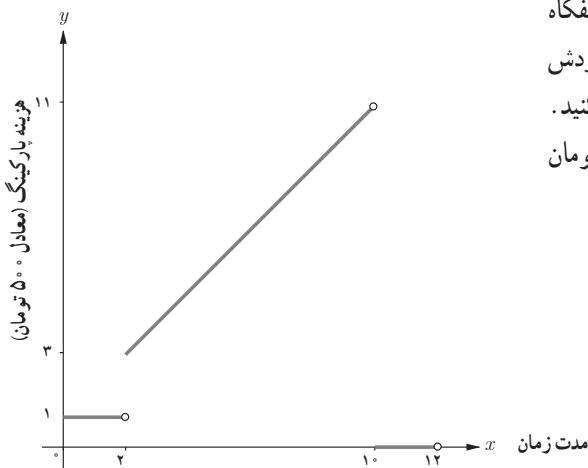
چون دامنه دوعضوی است، پس دو زوج مرتب باهم برابرند.

$$\begin{cases} m+3=-1 \rightarrow m=-4 \notin N \times \\ m-4=-1 \rightarrow m=3 \end{cases} \rightarrow m+t=3+3=6$$

۱۳ اگر هزینه توقفگاه در روز جمعه، بر اساس مدت زمان سپری شده از بازگشایی فروشگاه از ساعت

۸ صبح از تابع

$$C(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ x+1 & 2 \leq x < 10 \\ 0 & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$



پیروی کند، بارسم نمودار تابع، هزینه توقفگاه هر خودرو را با توجه به ساعت و زمان ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد بر روی محور  $y$  ها معادل ۵۰۰ تومان است).

همان طور که در صورت سؤال دو بار تأکید شده است، هدف سؤال، جوابگویی براساس رسم نمودار است و نه درگیر کردن دانش آموزان با محاسبات ریاضی آن. پس از رسم نمودار تابع سه ضابطه ای و با توجه به ورود هر خودرو بعد از ساعت ۸:۰۰ صبح، به دلیل آنکه متغیر  $x$  بیانگر مدت زمان سپری شده پس از بازگشایی فروشگاه است و نه زمان ورود خودرو، رابطه زیر را داریم:

$$x = 8:00 \text{ صبح} - \text{ساعت ورود خودرو به پارکینگ فروشگاه} = x$$

مثلاً اگر خودرویی ساعت ۱۱:۰۰ وارد فروشگاه شود، در این حالت  $x=3$  در نظر گرفته می شود که به کمک نمودار، عرض آن بر روی محور  $y$  ها مشخص می شود. البته به کمک صفحه شطرنجی نیز مقدار عرض نقطه برابر ۴ به دست می آید که چون هر واحد هزینه ۵۰۰ تومان در نظر گرفته شده است. هزینه پارکینگ برای خودرویی

که رأس ساعت ۱۱:۰۰ وارد پارکینگ می‌شود ۲۰۰۰ تومان محاسبه می‌شود. اما از دانش‌آموزان قوی‌تر می‌توان محاسبه جزئیات دقیقه و محاسبات مربوط به آن را نیز خواست مثلاً ساعت ۱۱:۳۰ یعنی سه و نیم ساعت پس از ورود خودرو، که هزینه پارکینگ با توجه به نمودار، از ضرب ۴/۵ در ۵۰۰ یعنی ۲۲۵۰ تومان محاسبه می‌شود. برای دقایق و زمان‌هایی که مقدار هزینه پارکینگ، عددی با واحدهای خرده به دست می‌آید، می‌توانیم فقط دقیقه را در نظر بگیریم و وارد واحدهای کوچک‌تر از دقیقه نشویم. همان‌طور که در بانک‌ها و بسیاری از مراکز دیگر، زمان ورود را تا حد مشخصی در نظر می‌گیرند و ثانیه وارد محاسبه نمی‌شود.

ورود خودرو به پارکینگ در ساعت ۱۱:

$$۱۱ - ۸ = ۳$$

با توجه به نمودار ۴ = ۳ + ۱

$$\text{تومان } ۲۰۰۰ = ۵۰۰ \times ۴ = \text{هزینه}$$

ورود خودرو به پارکینگ در ساعت ۱۱:۳۰:

$$۱۱:۳۰ - ۸ = ۳:۳۰ \rightarrow ۳\frac{۱}{۲} = \frac{۷}{۲} = ۳\frac{۳}{۵}$$

با توجه به نمودار: ۴/۵ + ۱ = ۳/۵

$$\text{تومان } ۲۲۵۰ = ۵۰۰ \times ۴\frac{۳}{۵} = \text{هزینه}$$

## حل تمرینات برگزیده درس دوم (صفحه ۴۳ کتاب)

۱ جدول مالیاتی زیر را، که توسط هیئت مدیره یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید:

نرخ مالیات (درصد)	حقوق ماهیانه (تومان)
معاف از مالیات	حقوق تا ۱/۳۰۰/۰۰۰
۱۰	مازاد بر ۱/۳۰۰/۰۰۰ تا ۲/۵۰۰/۰۰۰
۱۵	مازاد بر ۲/۵۰۰/۰۰۰ تا ۴/۵۰۰/۰۰۰
۲۵	مازاد بر ۴/۵۰۰/۰۰۰

الف) نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

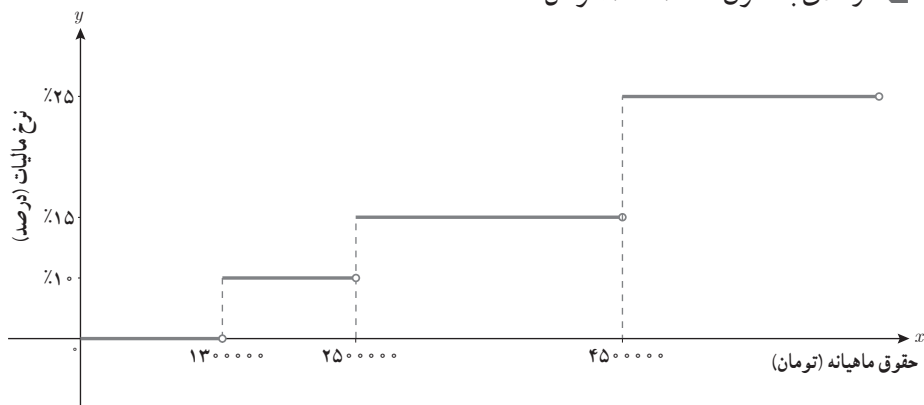


ب) به کمک نمودار پلکانی و محاسبه سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهیانه، مبلغ مالیات هر یک از کارمندان زیر را محاسبه کنید :

❑ کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ تومان

❑ کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰ تومان

❑ کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰ تومان



کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ ، معاف از مالیات

کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰ :  $۲۴۰۰۰۰ - ۱۳۰۰۰۰ = ۱۱۰۰۰۰$

تومان  $۱۱۰۰۰۰ \times \frac{۱۰}{۱۰۰} = ۱۱۰۰۰$

کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰ :

$$(۲۵۰۰۰۰ - ۱۳۰۰۰۰) \times \frac{۱۰}{۱۰۰} + (۴۵۰۰۰۰ - ۲۵۰۰۰۰) \times \frac{۱۵}{۱۰۰} + (۶۰۰۰۰۰ - ۴۵۰۰۰۰) \times \frac{۲۵}{۱۰۰}$$

$$= ۱۲۰۰۰ + ۳۰۰۰۰ + ۳۷۵۰۰ = ۷۹۵۰۰ \text{ تومان}$$

۵ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

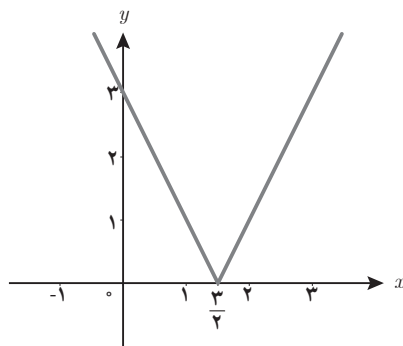
الف)  $y = |۲x - ۳|$

ب)  $y = |۳x + ۱|$

$$۲x - ۳ = ۰ \rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

$$y = \begin{cases} ۲x - ۳ & x \geq \frac{۳}{۲} \\ -(۲x - ۳) & x < \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$x$	۰	$\frac{۳}{۲}$	۳
$y$	۳	۰	۲

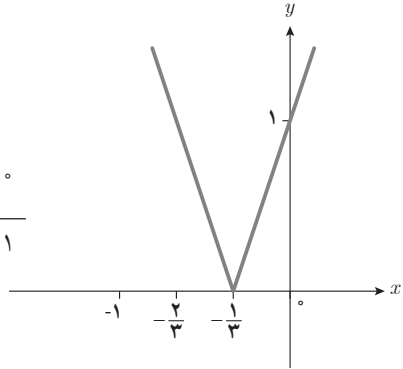


$$y = |3x + 1|$$

$$3x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$y = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq -\frac{1}{3} \\ -(3x + 1) & x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

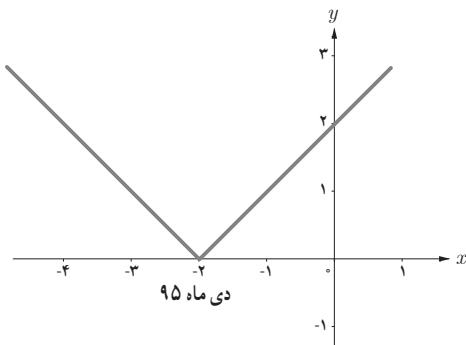
$x$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$0$
$y$	$1$	$0$	$1$



#### ۶ با توجه به نمودار

الف) شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.

اگر پروژه را در دی ماه ۹۵ تحویل دهد جریمه نمی‌شود. به ازای هر مدت زمان اختلاف با زمان تحویل پروژه باید جریمه‌ای پرداخت شود.



ب) به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هر یک از نیم خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

$$(-2, 0), (0, 2) \rightarrow m = 1$$

$$y = x + 2 \quad x \geq -2$$

$$(-2, 0), (-4, 2) \rightarrow m = -1$$

$$y = -x - 2 \quad x < -2$$

ج) به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \geq -2 \\ -x - 2 & x < -2 \end{cases} \rightarrow f(x) = |x + 2|$$

د) شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟ افزایش یا کاهش شیب خط به چه معناست؟

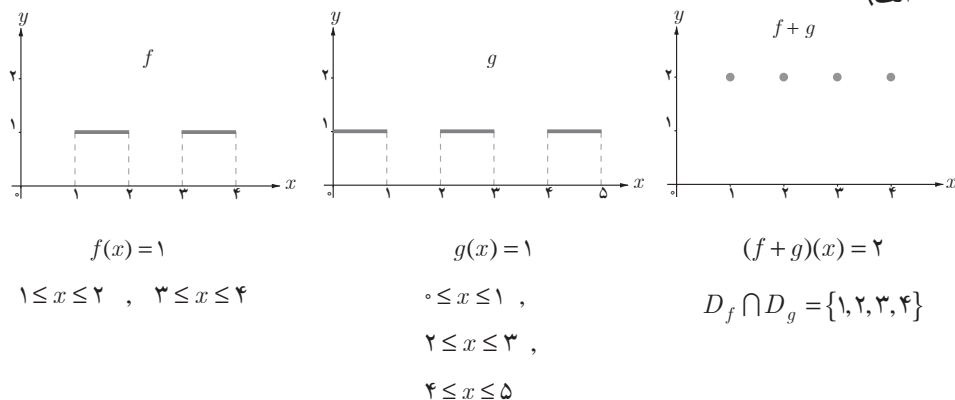
مثبت بودن شیب خط، به معنای تأخیر در زمان تحویل پروژه و منفی بودن آن به معنای تحویل زودتر از موعد مقرر است. هردو حالت، موجب خسارت دیدن صاحب کار است.

افزایش مقدار شیب خط، نشان دهنده افزایش مبلغ جریمه و کاهش مقدار شیب خط، نشان دهنده کاهش مبلغ جریمه است؛ مثلاً در «کار در کلاس» صفحه ۴۱ کتاب، جریمه دو ماه اختلاف با زمان تحویل پروژه، ۴ میلیون تومان، و در تمرین ۶ صفحه ۴۴ کتاب، جریمه دو ماه اختلاف با زمان تحویل پروژه، ۲ میلیون تومان است.

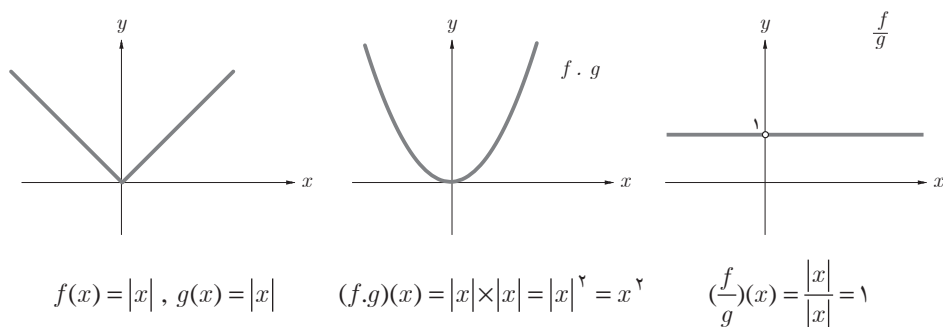
## حل تمرینات برگزیده درس سوم (صفحه ۵۲ کتاب)

۱ در هر حالت با توجه به نمودار توابع  $f$  و  $g$ ، نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.

الف)



ب)



۲ یک شرکت هولدینگ<sup>۱</sup> دارای دو کارخانه  $A$  و  $B$  است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید  $x$  تن کاشی در کارخانه  $A$  به ترتیب  $-2x^2 + 16x$  و  $8x + 6$  و در کارخانه  $B$  به ترتیب  $-x^2 + 12x$  و  $2x + 9$  واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان):

الف) تابع سود شرکت هولدینگ را به دست آورید.

$$\text{سود کارخانه } A: P_1(x) = R_1(x) - C_1(x) = -2x^2 + 16x - (8x + 6) = -2x^2 + 8x - 6$$

$$\text{سود کارخانه } B: P_2(x) = R_2(x) - C_2(x) = -x^2 + 12x - (2x + 9) = -x^2 + 10x - 9$$

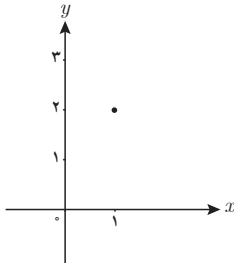
سود کارخانه  $B$  + سود کارخانه  $A$  = سود شرکت هولدینگ

$$\rightarrow P(x) = P_1(x) + P_2(x) = -3x^2 + 18x - 15$$

ب) این هولدینگ با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می‌رسد؟  
معادله سود شرکت هولدینگ، درجه دوم و نمودار آن سهمی است و ماکزیمم مقدار در رأس آن اتفاق می‌افتد.

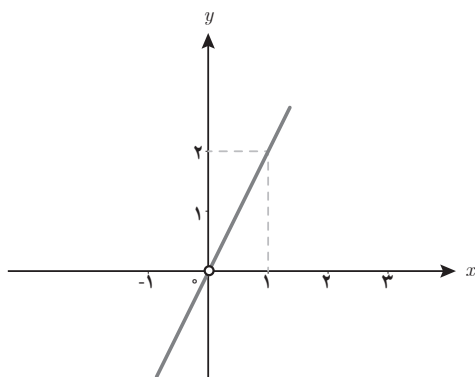
$$\rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{2(-3)} = 3 \quad \text{تن}$$

۳ اگر  $f(x) = [x]$  با دامنه  $0 \leq x \leq 1$  و  $g(x) = |x|$  با دامنه  $1 \leq x \leq 2$  و  $h(x) = x^2 - 4$  با دامنه  $1 \leq x \leq -1$  در نظر گرفته شود، جدول زیر را کامل کنید.

نمودار	ضابطه	تابع
	$s(x) = [x] +  x $ $D_s = Df \cap Dg = \{1\}$ $x = 1 \rightarrow y = 2$ $(1, 2)$	$s(x) = f(x) + g(x)$

۱- هولدینگ از واژه لاتین Hold به معنای نگه داشتن می‌آید. شرکت هولدینگ یا مادر، شرکتی سهامی است که دارای «شرکت‌های زیرمجموعه» است. کنترل شرکت‌های زیرمجموعه مستقیماً زیر نظر مدیران و هیئت مدیره شرکت اصلی است.

$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$	$q(x) = \frac{x^2 - 4}{[x]}$ $D_f \cap D_h - \{x   f(x) = 0\} = \{1\}$ $x = 1 \rightarrow y = -3$ $(1, -3)$	
$p(x) = h(x) \times g(x)$	$p(x) = (x^2 - 4) \times  x $ $D_h \cap D_g = \{1\}$ $x = 1 \rightarrow y = -3$ $(1, -3)$	



۲ اگر  $f(x) = x^2$  و تابع  $(\frac{f}{g})(x)$  به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع  $g(x)$  را به دست آورید؟

روش اول:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = ax \quad , \quad a = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2x \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = R - \{0\}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2x \rightarrow \frac{x^2}{g(x)} = 2x \rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$

روش دوم :

با توجه به آنکه نمودار تابع  $\frac{f}{g}$  از درجه اول است و  $f(x) = x^2$  پس ضابطه تابع  $g$  باید از درجه اول باشد؛ یعنی  $g(x) = ax + b$ . از طرف دیگر، نمودار تابع  $\frac{f}{g}$  در  $x = 0$  تعریف نشده است. درحالی که  $f(0)$  وجود دارد و برابر صفر است. پس باید  $g(0) = 0$  باشد که تابع  $\frac{f}{g}$  در  $x = 0$  تعریف نشود؛ بنابراین، ضابطه تابع  $g$  به صورت  $g(x) = ax$  است.

حال با توجه به نقطه مشخص شده  $A(1, 2)$  بر روی نمودار تابع  $\frac{f}{g}$  داریم :

$$f(x) = x^2 \rightarrow f(1) = 1, \quad g(x) = ax \rightarrow g(1) = a$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = 2 \rightarrow \frac{f(1)}{g(1)} = 2 \rightarrow \frac{1}{a} = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x$$

## فصل ۳

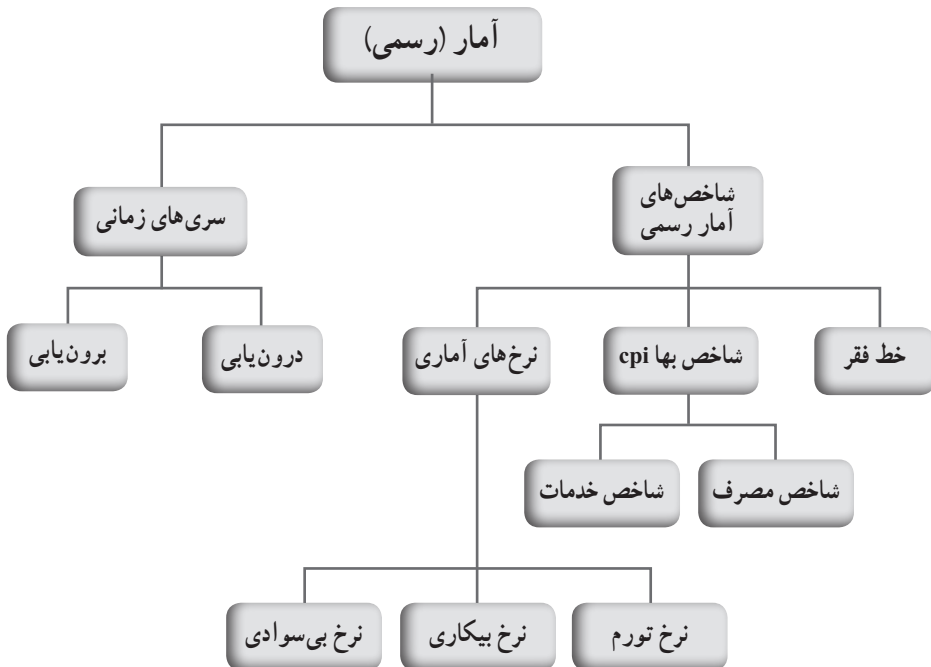
### آمار

## نگاه کلی به فصل

دانش آموز، در دوره ابتدایی و متوسطه اول، با علم آمار به عنوان علم گردآوری اطلاعات و پردازش آشنا شده و رسم انواع نمودارها را در حد مطلوبی فراگرفته است. در دوره متوسطه دوم و در کتاب ریاضی و آمار رشته انسانی، ضمن جمع بندی و تکمیل مطالب دوره های قبل، با طریقه گردآوری داده ها و معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی که می توانند به ما در تصمیم گیری کمک کنند، آشنا شده اند.

این فصل شامل دو درس است: در درس اول، با عنوان «شاخص ها»، دانش آموزان با برخی از شاخص های آمار رسمی آشنا می شوند و می آموزند که آمار چگونه در علوم مختلف نظیر اقتصاد، جامعه شناسی، زبان شناسی و تربیت بدنی در زندگی روزمره و همچنین تحصیلاتشان نقش خواهد داشت. در درس دوم، با عنوان «سری های زمانی»، دانش آموزان با یکی از انواع مدل سازی آماری و همچنین پیش بینی آشنا می شوند.

## نقشه مفهومی فصل





## نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ فرض کنیم، در یک نمونه ۳۰ تایی از درآمد افراد مختلف یک کشور در آمریکای جنوبی، داده‌های جدول زیر برحسب هزار دلار به دست آمده باشد. با توجه به تعریف خط فقر، تخمینی از خط فقر برای این کشور به دست آورید.

۱/۲	۵	۲/۴	۶/۳	۰/۷	۲/۳	۶	۴	۱/۳	۳
۴	۲	۰/۷	۰/۸۵	۲/۵	۹	۱/۷	۳/۳۵	۴	۳
۳	۱/۵	۰/۸	۵/۲	۳/۵	۱/۷	۳/۲	۲/۳	۲/۶	۱/۴

۲ مشخص کنید هر یک از افراد زیر به چه دسته‌ای تعلق دارند :

- خانم‌های خانه‌دار ☐ شاغل ☐ بیکار ☐ خارج از نیروی کار ☐
- دانشجویان ☐ شاغل ☐ بیکار ☐ خارج از نیروی کار ☐
- افراد معلول و مریض احوال ☐ شاغل ☐ بیکار ☐ خارج از نیروی کار ☐
- افراد بدون شغلی که، به دلیل ناامیدی از پیدا کردن شغل، در جست‌وجوی کار نبوده‌اند :
- ☐ شاغل ☐ بیکار ☐ خارج از نیروی کار ☐

۳ در سرشماری از یک روستا، کل جمعیت ۷۵۰ نفر و جمعیت افراد کمتر از ۱۶ سال ۲۲۰ نفر بوده است. ترکیب جمعیت ۱۶ ساله و بالاترین روستا (از نظر وضع فعالیت) به صورت جدول زیر بوده است :

جمع	سایر (ناامید از پیدا شدن کار، بیمار و...)	در حال تحصیل	خانه‌دار	جمعیت بیکار	دارای درآمد بدون کار	جمعیت شاغل	شرح
۵۳۰	۵۰	۱۸۰	۱۰۰	۲۵	۲۵	۱۵۰	تعداد

با توجه به اطلاعات جدول، نرخ بیکاری این روستا را محاسبه کنید. پاسخ:  $\% ۱۴ \approx \frac{۲۵}{۱۵۰+۲۵} \times ۱۰۰$

۴ در این روستا یک کارگاه نجاری تأسیس می‌شود. اگر ده نفر از جمعیت بیکار روستا جذب این کارگاه شوند، نرخ بیکاری چقدر کاهش می‌یابد؟

۵ اگر هزینه پوشاک برای یک خانواده ۵ نفره در سال ۱۳۹۰ برابر ۱۳۰۰۰۰۰۰ ریال باشد، با توجه به جدول، شاخص بهای مصرف هزینه پوشاک برای یک خانواده ۵ نفره در خرداد ماه سال ۱۳۹۳ و ۱۳۹۴ را محاسبه کنید.

۶ با توجه به جدول، شاخص بهای مصرف کالا و خدمات نرخ تورم را در سال ۱۳۹۳ به دست آورید.

مشخص کنید هریک از افراد زیر به چه دسته‌ای تعلق دارند:

خانم‌های خانه‌دار	<input type="checkbox"/> شاغل	<input type="checkbox"/> بیکار	<input type="checkbox"/> خارج از نیروی کار
دانشجویان	<input type="checkbox"/> شاغل	<input type="checkbox"/> بیکار	<input type="checkbox"/> خارج از نیروی کار
افراد معلول و بیمار	<input type="checkbox"/> شاغل	<input type="checkbox"/> بیکار	<input type="checkbox"/> خارج از نیروی کار

افراد بدون شغلی که، به دلیل ناامیدی از پیدا کردن شغل، در جست‌وجوی کار نبوده‌اند:

☐ شاغل ☐ بیکار ☐ هیچ کدام

اکنون جمعیت را به دو گروه بالای شانزده سال و کمتر از شانزده سال تقسیم می‌کنیم. با توجه به اینکه افراد گروه دوم (افراد کمتر از ۱۶ سال) در سن اشتغال قرار ندارند، بنابراین، این گروه در محاسبه نرخ بیکاری به حساب نمی‌آیند. حال با توجه به تعاریف و قراردادهایمان، افراد شانزده سال و شانزده سال به بالا را به گروه‌های دیگری به شکل زیر تجزیه می‌کنیم؛

الف) مجموعه افراد شاغل؛

ب) مجموعه افراد بیکار؛

ج) مجموعه افراد دارای درآمد بدون کار؛

د) مجموعه افراد خانه‌دار؛

هـ) مجموعه افراد در حال تحصیل؛

و) سایر.

۷ در سرشماری از یک روستا، کل جمعیت ۷۵۰ نفر و جمعیت افراد کمتر از ۱۶ سال ۲۲۰ نفر بوده

است. ترکیب جمعیت ۱۶ ساله و بالاترین روستا (از نظر وضع فعالیت) به صورت جدول زیر بوده است:

جمع	سایر (ناامید از پیدا شدن کار، بیمار و ...)	در حال تحصیل	خانه‌دار	جمعیت بیکار	دارای درآمد بدون کار	جمعیت شاغل	شرح
۵۳۰	۵۰	۱۸۰	۱۰۰	۲۵	۲۵	۱۵۰	تعداد

با توجه به اطلاعات جدول، نرخ بیکاری این روستا را محاسبه کنید.

۸ در این روستا یک کارگاه نجاری تأسیس می‌شود. اگر ده نفر از جمعیت بیکار روستا جذب این

کارگاه شوند، نرخ بیکاری چقدر کاهش می‌یابد؟

۹ برای هریک از موارد زیر مثال بزنید.

الف) سری زمانی در اقتصاد

(ب) سری زمانی در جمعیت‌نگاری

(ج) سری زمانی در بازاریابی

(د) سری زمانی در هواشناسی

(هـ) سری زمانی در پزشکی

۱۰ جمعیت گردشگران سالیانه یک کشور برحسب میلیون نفر، به صورت زیر هر دو سال یک بار گزارش

شده است :

سال	۱۳۸۸	۱۳۹۰	۱۳۹۲	۱۳۹۴
تعداد گردشگر	۸/۵	۱۰	۱۲/۲	۱۳

(الف) نمودار سری‌های زمانی جمعیت را رسم کنید.

(ب) تعداد گردشگرها را در سال‌های ۱۳۹۱ و ۱۳۹۳ درون‌یابی کنید.

(ج) تعداد گردشگران را در سال ۱۳۹۵ برون‌یابی کنید.

۱۱ نمودارهای زیر سری زمانی مربوط به سود یک کارخانه برحسب میلیون تومان را یک بار هر ده روز

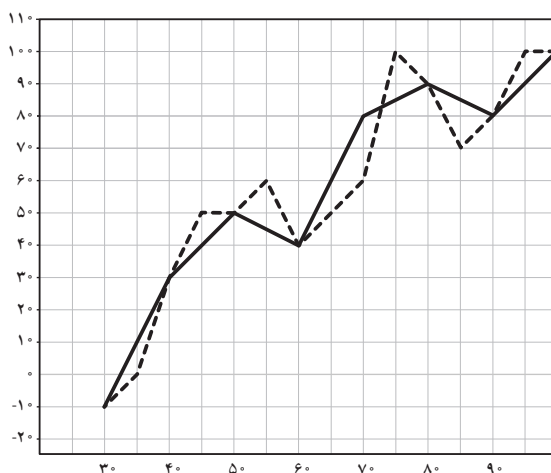
و بار دیگر هر پنج روز نشان می‌دهد.

(الف) مشخص کنید کدام نمودار مربوط به هر پنج روز یک بار می‌باشد. چرا؟

(ب) اگر تنها سری زمانی ده روز یک بار را داشته باشیم، با توجه به شکل خطای درون‌یابی برای روز

چهل و پنجم را مشخص کنید.

(ج) با توجه به هر دو نمودار سود کارخانه را در روز پنجاه و دوم درون‌یابی کنید.



۱۲ میزان صید ماهی در شهر بندرعباس برحسب هزار تن در طی دو سال به صورت زیر گزارش شده است.

اسفند	بهمن	دی	آذر	آبان	مهر	شهریور	مرداد	تیر	خرداد	اردیبهشت	فروردین	
۲/۵	۳/۲	۳/۴	۲/۵	۲/۴	۲/۳	۲	۱/۵	۱/۶	۱/۸	۲	۲/۲	۱۳۹۳
۲/۷	۳/۳	۳	۲/۶	۲/۶	۲/۴	۱/۹	۱/۶	۱/۸	۲	۲/۱	۲/۳	۱۳۹۴

نمودار سری زمانی هریک را جداگانه رسم کنید. میزان صید را در هر فصل از سال توصیف کنید.



۱۳ نمودار روبه‌رو سری زمانی سود یک فروشگاه را در برخی از ماه‌ها نشان می‌دهد. مجموع سود ۹ ماه اول این فروشگاه را تخمین بزنید.

سال	حجم آب (میلیون مترمکعب)
۱۳۸۷	۳/۴
۱۳۸۸	۳/۶
۱۳۸۹	۳/۳
۱۳۹۰	۳
۱۳۹۱	۳/۳
۱۳۹۲	۲/۹
۱۳۹۳	۲/۸
۱۳۹۴	۳
۱۳۹۵	۳/۴
۱۳۹۶	۳/۶

۱۴ جدول روبه‌رو حجم آب پشت سد الف را برحسب میلیون متر مکعب در اول تیرماه ده سال متوالی نشان می‌دهد. سری زمانی داده‌های روبه‌رو را رسم کنید. حجم آب پشت سد را برای تیرماه سال بعد برون‌یابی کنید.

## شاخص‌های آماری

### درس اول

### اهداف درس اول

آگاهی از:

۱. تعریف شاخص‌های آماری و درک کاربردهای آن؛
۲. تعریف خط فقر و نحوه محاسبه آن؛
۳. تعریف خط فقر بین‌المللی و درک رابطه آن با مبلغ یارانه دریافتی و دانستن نحوه محاسبه آن؛
۴. تعریف شاخص بهای کالا و مصرف و برآورد هزینه‌های سال جاری و سال به‌خصوص با توجه به نمودار شاخص بهای کالا و مصرف و دانستن هزینه‌های سال پایه؛
۵. فرمول نرخ تورم و درک محاسبه آن.

### روش تدریس

#### سؤال پیش درس صفحه ۵۶

در این سؤال، پیش‌زمینه‌ای برای معرفی شاخص‌ها به‌عنوان کمیت‌هایی که با آنها اطلاعاتی از جامعه به‌دست می‌آوریم، ایجاد می‌شود. می‌توان از میانه، میانگین و انحراف معیار به‌عنوان پاسخ سؤال یاد کنیم.

#### فعالیت صفحه ۵۶

در این فعالیت، با بررسی میزان حقوق دریافتی کارکنان یک مؤسسه تجاری فرضی و محاسبه متوسط درآمد هر عضو از خانواده و طرح پرداخت یارانه شرکت به کارکنانی که میزان متوسط درآمد هر عضو آن کمتر از سایرین است، زمینه تعریف خط فقر را فراهم می‌کنیم.

#### «کار در کلاس اول»، صفحه ۵۷

در این «کار در کلاس» با نمونه قراردادن میزان درآمد کارکنان مؤسسه تجاری فرضی، به‌عنوان درآمد افراد جامعه، فرمول خط فقر را تمرین می‌کنیم.

### «کار در کلاس دوم»، صفحه ۵۷

در این «کار در کلاس» با معرفی خط فقر بین المللی توسط بانک جهانی، شاخص دیگری را معرفی می کنیم. سپس با محاسبه آن، ارتباط بین آن و یارانه را بررسی می کنیم. در پایان این فعالیت، زمینه معرفی شاخص مهیا می شود.

### تصویر صفحه ۵۷

در این تصویر با اشاره به اینکه داشبورد اتومبیل، کمیت های عددی زیادی را معرفی می کند (همگی به نوعی شاخص محسوب می شوند) به تعریف شاخص، عمق بیشتری می بخشیم.

### فعالیت صفحه ۵۸

در این فعالیت، شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی معرفی می شود. این شاخص با نام اختصاری cpi شناخته می شود و کاربردهای فراوانی دارد. این شاخص نسبت به یک سال پایه محاسبه می شود و، در حقیقت، درصد تغییرات نسبت به سال پایه است.

در صفحه ۵۸ نمودار پراکنش نگاشت شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی مناطق شهری در ۵ سال متوالی رسم شده است.

این شاخص، به عنوان وسیله ای برای اندازه گیری سطح عمومی قیمت کالاها و خدمات مورد مصرف خانوارها، یکی از بهترین معیارهای سنجش تغییر قدرت خرید پول داخل کشور به شمار می رود. کاربرد این شاخص برای تعدیل مزد و حقوق در قراردادهای دوجانبه و نیز دعاوی حقوقی و همچنین به عنوان مهم ترین معیار سنجش میزان تورم در اقتصاد ایران، اهمیت فراوان دارد.

### مطالبی برای معلم در ارتباط با cpi

۱ سابقه بررسی در ایران : شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی اولین بار در ایران در سال ۱۳۱۵ تهیه شد و در سال ۱۳۳۸ در جنبه های مختلف تهیه این شاخص، تجدید نظر اساسی شد. تجدید نظرهای بعدی به علت تغییرات چشمگیر در الگوی مصرفی خانوار و تحولات اجتماعی و اقتصادی به ترتیب در سال های ۱۳۴۸، ۱۳۵۳، ۱۳۶۱، ۱۳۶۹، ۱۳۷۶، ۱۳۸۳ و آخرین آن در سال ۱۳۹۰ صورت گرفت.

۲ دوره بررسی : دوره بررسی این طرح ماهانه است.

۳ زمان بررسی : زمان بررسی این طرح از اول هر ماه شروع و تا بیست و نهم همان ماه ادامه دارد.

۴ پوشش جغرافیایی : گستردگی جغرافیایی شاخص، به میزان قابل توجهی، تعیین کننده درجه درستی و اعتبار شاخص است. بدیهی است فرهنگ مصرفی و سلیقه افراد تا حدودی می تواند ناشی از شرایط اقلیمی و خصوصیات جغرافیایی هر منطقه باشد. به همین دلیل به منظور پوشش مناسب جغرافیایی در همه مناطق شهری کشور، ۷۹ شهر نمونه در سطح استان های مختلف کشور به طریق علمی طوری انتخاب شده

که تغییرات قیمت در آنها نشانگر تغییرات در کل مناطق شهری و در هر استان باشد. در نهایت، شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی در ۳۱ استان به صورت مستقل محاسبه شده و از ترکیب شاخص استان‌های مختلف، شاخص کل مناطق شهری کشور به دست می‌آید.

۵ پوشش جمعیتی شاخص: در سال پایه ۱۳۹۰ پس از انتخاب شهرها، حدود ۱۶۰۰۰ خانوار به طریق علمی از بین خانوارهای ساکن در ۷۹ شهر انتخاب شد که متوسط هزینه آنها نماینده متوسط هزینه همه خانوارهای ساکن در شهرهای ایران است. خانوارهای نمونه، همه نوع خانوار با درآمدها و الگوهای مصرف متفاوت را شامل می‌شود. پس از انتخاب خانوارها، با مراجعه مستقیم آمارگیران اداره آمار اقتصادی بانک مرکزی، درباره ریز اقلام و هزینه آنها پرسش و سپس به کل خانوارهای ساکن در هر استان و به کل مناطق شهری تعمیم داده می‌شود تا هزینه خانوارها برای کلیه کالاها و خدمات، که در طول سال خریداری و مصرف می‌شود، مشخص شود.

۶ طبقه‌بندی کالاها و خدمات: ۳۸۵ قلم کالا و خدمت مشمول بررسی، به ۱۲ گروه اصلی تقسیم شده که ضرایب اهمیت آنها به شرح ذیل است:

نام گروه	ضریب اهمیت
۱- خوراکی‌ها و آشامیدنی‌ها	۲۷/۸۳
۲- دخانیات	۰/۳۵
۳- پوشاک و کفش	۴/۹۴
۴- مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌ها	۳۲/۸۲
۵- اثاث، لوازم و خدمات مورد استفاده در خانه	۵/۱۳
۶- بهداشت و درمان	۶/۹۸
۷- حمل و نقل	۹/۸۷
۸- ارتباطات	۲/۳۸
۹- تفریح و امور فرهنگی	۲/۸۵
۱۰- تحصیل	۲/۲۴
۱۱- رستوران و هتل	۱/۸۶
۱۲- کالاها و خدمات متفرقه	۳/۲۰

۷ نحوه جمع‌آوری اطلاعات: جمع‌آوری اطلاعات مربوط به قیمت کالاها و خدمات، در همه شهرهای مورد بررسی، از طریق مراجعه مستقیم آمارگیران ثابت، رسمی، محلی و کارآزموده اداره آمار اقتصادی بانک مرکزی به منابع اطلاع و مصاحبه با آنها صورت می‌گیرد. در واقع، برای دستیابی به قیمت‌های واقعی، آمارگیران اقتصادی این اداره هر ماه به حدود ۴۰۰۰۰ منبع اطلاع مراجعه و از قیمت جاری بیش از ۱۲۱۰۰۰ مظنه از کالاها و خدمات، پرسش می‌کنند. در صورتی که قیمت کالا یا خدمتی در ماه قیمت‌گیری نسبت به ماه گذشته، افزایش یا کاهش داشته باشد، دلایل این نوسان، بررسی و ثبت می‌شود. در جمع‌آوری اطلاعات همواره سعی می‌شود قیمت‌های عملی حاکم بر بازار هر شهر، جمع‌آوری و گزارش شود. منبع:

#### مثال صفحه ۵۹

در این مثال، نحوه محاسبه شاخص بهای مصرف‌نا و گوشت محاسبه می‌شود. اعداد ۲۰۰ و ۸۰، به ترتیب، میزان متوسط مصرف‌نا و گوشت خانوارهای ایرانی است.

#### کار در کلاس صفحه ۵۹

در این «کار در کلاس»، با پر کردن جاهای خالی، می‌خواهیم دانش‌آموز بر مفهوم شاخص بهای کالا و خدمات تسلط بیشتری پیدا کند.

۱ زمان — عدد شاخص (درصد نسبت به سال پایه)

۲ ندارد

۳ گران — خدمات

۴ ۳۰۰

۵ قدرت خرید خانوارها را نشان می‌دهد

#### مطلب درسی صفحه ۶۰

در این مطلب درسی، نرخ تورم و ارتباط آن با  $cpi$  معرفی می‌شود.

#### «کار در کلاس» صفحه ۶۰

در این «کار در کلاس»، نرخ بیکاری برای دانش‌آموز تشریح می‌شود. یک تعریف جدید به جای معرفی شدن در «فعالیت»، در تمرین «کار در کلاس» معرفی می‌شود. این امر نشان می‌دهد که این تعریف در زمره اهداف درجه دوم درس قرار می‌گیرد. علاوه بر این شاخص، شاخص‌های دیگری مانند شاخص توده بدنی ( $BMI$ ) و شاخص خوانایی نیز در تمرین‌های پایان درس قرار می‌گیرند. از این روند کتاب نتیجه می‌گیریم شاخص‌های زیادی هستند که می‌توانیم از آنها در درس یا فرایند ارزشیابی استفاده کنیم.



## نرخ بیکاری

نرخ بیکاری، یکی از مهم‌ترین شاخص‌های آماری مهم برای مردم و مسئولان است. مردم همیشه علاقه‌مندند بدانند نرخ بیکاری، که هر سال از طرف دولت‌ها اعلام می‌شود، چگونه محاسبه می‌شود و چه عواملی بر آن تأثیرگذار است.

برای محاسبه نرخ بیکاری در یک جامعه، ابتدا تعاریف و قراردادهای زیر را در نظر می‌گیریم. شاغل: فرد ۱۶ ساله یا بالاتر از ۱۶ ساله‌ای که در یک هفته مرجع (بازه زمانی هفت روزه‌ای که وضع فعالیت افراد در آن در نظر گرفته می‌شود) حداقل یک ساعت کار کرده باشد.

بیکار: فرد ۱۶ ساله یا بالاتر از ۱۶ ساله‌ای که سه شرط زیر را توأمان دارا باشد:

- ۱- در هفته مرجع حتی یک ساعت هم کار نکرده باشد؛
- ۲- آمادگی برای انجام دادن کار داشته باشد؛
- ۳- در هفته مرجع و سه هفته قبل از آن، جویای کار بوده باشد (اقدامات مشخصی را به منظور جست‌وجوی شغل دارای مزد یا خوداشتغالی انجام داده باشد).

## محاسبه نرخ بیکاری

نرخ بیکاری: از تقسیم تعداد افراد بیکار جویای کار بر مجموع افراد بیکار و شاغل حاصل می‌شود. برای بیان راحت‌ترین نرخ، معمولاً آن را در ۱۰۰ ضرب کرده و به درصد بیان می‌کنند. نرخ تورم: نرخ تورم، از شاخص‌های آماری مهم دیگری است که همواره بر زندگی مردم اثر می‌گذارد.

پدیده تورم از برهم خوردن تعادل میان کالای موجود در جامعه با مقدار نقدینگی یا پول در گردش پدید می‌آید. به عبارت بهتر، وقتی کالا کمیاب و پول یا قدرت خرید برای مالکیت آن زیاد باشد، خلأ حاصل «تورم» نام می‌گیرد.

فرض کنید شما یک منزل دارید که در حالت عادی ۳ نفر مشتری برای خرید آن از شما پول دارند. وقتی تعداد مشتریان پول‌دار، که نماد قدرت خرید کاذب هستند، به ۳۰ نفر افزایش یابد، اما واحد آماده فروش همان یک عدد باقی‌بماند، رفتار اقتصادی شما چه خواهد بود؟ روشن است که در برابر سیل مشتری‌ها قیمت را بالا می‌برید. این پدیده درباره سایر کالاها هم وجود دارد؛ یعنی وقتی تعداد مشتری زیاد در برابر کالای کم قرار می‌گیرد، تورم تولید می‌شود و قیمت‌ها بالا می‌رود.

شیوه محاسبه نرخ تورم: نرخ تورم، درصد تغییر سطح قیمت در واحد زمان است؛ بنابراین، اگر قیمت

فعلی را با  $P_1$  و قیمت قبلی را با  $P_0$  نشان دهیم، نرخ تورم با دستور زیر حساب می‌شود.

$$\text{تورم} = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \times 100\%$$

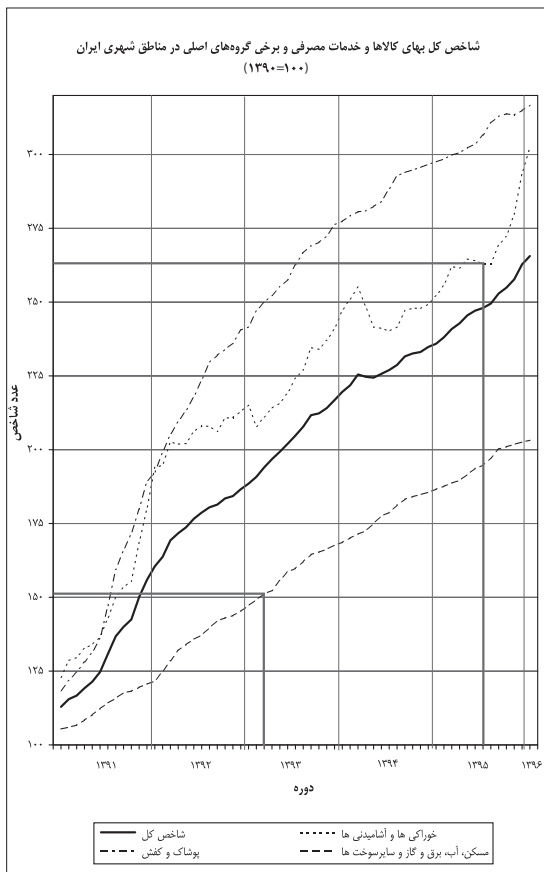
دقت داشته باشید که هرچه نرخ تورم افزایش یابد، قدرت خرید مردم کمتر می‌شود.

## حل تمرینات برگزیده

۱ اگر میانگین درآمد خانوارهای کشور ۳۵۰۰۰۰۰۰ ریال باشد، حداقل حقوق دریافتی کارکنان شرکت الف باید چقدر باشد تا هیچ کارمندی در این شرکت زیر خط فقر نباشد؟ چه زمانی از میانه درآمد خانوارها برای محاسبه خط فقر استفاده می‌کنیم؟ پاسخ:

$$۳۵۰۰۰۰۰۰ \div ۲ = ۱۷۵۰۰۰۰۰$$

بنابراین، خط فقر، هفده میلیون و پانصد هزار ریال تعیین می‌شود. پس اگر شرکت می‌خواهد درآمد هیچ‌یک از کارمندانش زیر خط فقر نباشد، باید حداقل دریافتی کارکنان شرکت هفده میلیون و پانصد هزار ریال باشد. هنگامی که داده‌های دورافتاده داریم، بهتر است از میانه برای تعیین خط فقر استفاده کنیم.



۲ در یک منطقه ۱۲۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و شاغل اند. در این منطقه ۲۰۰ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جویای کارند.

الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟

ب) حداقل چند شغل در این منطقه باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه برابر ۵ درصد باشد؟

پاسخ: الف) 
$$\frac{200}{1400} \times 100 = 14.28\%$$

ب) 
$$\frac{200 - x}{1400} \times 100 = 5 \Rightarrow 200 - x = 70 \Rightarrow x = 130$$

پس باید ۱۳۰ شغل ایجاد کنیم تا نرخ بیکاری ۵ درصد باشد.

۳ خانواده آقای صالحی در فروردین ماه سال ۱۳۹۰، پانصد هزار تومان هزینه مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌ها داشته است. در همان تاریخ، هزینه ماهانه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌های این خانواده دویست و پنجاه هزار تومان بوده است. اگر تعداد افراد این خانواده تغییری نکرده باشد، بر مبنای نمودار شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی، موارد زیر را به‌طور تقریبی محاسبه کنید:

الف) هزینه ماهانه مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌های این خانواده در خردادماه ۱۳۹۳؛

ب) هزینه ماهانه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌های این خانواده در مهرماه ۱۳۹۵.

پاسخ:

$$\frac{500000 \times 153}{100} = 765000$$

الف)

$$\frac{250000 \times 264}{100} = 660000$$

ب)

۴ نماتوپ یا شاخص توده بدنی، که در سال گذشته آن را در کتاب ریاضی و آمار دیدید، یکی دیگر از شاخص‌های مهم آماری است که به «شاخص سلامت» معروف است. برای محاسبه آن باید وزن فرد را به کیلوگرم بر توان دوم قدش بر حسب متر تقسیم کرد.

جدول روبه‌رو اطلاعات خانواده صالحی را نشان می‌دهد.

افراد خانواده	سن (سال)	وزن (کیلوگرم)	قد (سانتی‌متر)
صالح	۱۷	۶۲	۱۷۷
برادر	۲۲	۸۵	۱۸۳
خواهر	۲۵	۵۳	۱۷۰
مادر	۵۰	۶۰	۱۶۵
پدر	۵۵	۸۱	۱۷۴

$$BMI_{(صالح)} = \frac{۶۲}{(۱/۷۷)^۲} = ۱۹/۷۸$$

$$BMI_{(برادر)} = \frac{۸۵}{(۱/۸۳)^۲} = ۲۵/۳۸$$

$$BMI_{(خواهر)} = \frac{۵۳}{(۱/۷۰)^۲} = ۱۸/۳۳$$

$$BMI_{(مادر)} = \frac{۶۰}{(۱/۶۵)^۲} = ۲۲/۰۳$$

$$BMI_{(پدر)} = \frac{۸۱}{(۱/۷۴)^۲} = ۲۶/۷۵$$

پدر و برادر اضافه وزن دارند. صالح و مادرش در محدوده سلامت قرار دارند. خواهرش کمبود وزن دارد.

**۵** موقع خرید کتاب‌های داستان، معمولاً به رده سنی مشخص شده، توجه می‌کنیم. به نظر شما چگونه این کار را انجام می‌دهند؟ آیا نظر افراد با تجربه برای تعیین سطح یک متن، برای همیشه، یکسان است؟ ارزیابی آنها کیفی است یا کمی؟

خوانایی متن عبارت است از میزان سهولت درک متن از طریق انتخاب واژه‌های مناسب و رعایت دستور نگارش.

یکی از شاخص‌های خوانایی، که سال‌های تحصیل خواننده متون انگلیسی را تخمین می‌زند، به صورت زیر تعریف شده است:

شاخص پایه آموزش =  $[(۴/۰) \times (\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات «دشوار»})]$   
 منظور از کلمات «دشوار» کلمات دو هجایی بدون در نظر گرفتن اسامی و کلمات ترکیبی آسان است. این شاخص عددی بین ۱ تا ۱۲ است که نشان‌دهنده پایه تحصیلی است.  
 الف) برای کتابی با متوسط طول جملات ۸ کلمه‌ای و ۲۰ درصد کلمه سخت، شاخص پایه آموزش را محاسبه کنید. این کتاب مناسب دانش‌آموزان چه پایه‌ای است؟  
 پاسخ: این کتاب مناسب دانش‌آموزانی است که پایه ..... را به پایان رسانده‌اند. (یازدهم)  
 $(۲۰ + ۸) \times ۰/۴ = ۱۱/۲$

ب) مزایا و محدودیت‌های این شاخص چیست؟

پاسخ: استفاده از این شاخص ساده است. با این حال، فرض می‌کند که کلمات بزرگ‌تر و جملات طولانی‌تر باعث ..... شدن (سخت) متن می‌شوند. اما یک نویسنده چیره‌دست می‌تواند با کلمات و جملات دیگری باعث ..... متن شود. (ساده شدن)

ج) همان‌گونه که متوجه شده‌اید، این شاخص براساس دو آماره از دو متغیر تعریف شده است. آنها را نام ببرید. (تعداد کلمات در هر جمله، کلمات دشوار)

۶ هزینه‌های زندگی خانواده آقای صالحی در سال ۱۳۹۰ در جدول زیر آمده است. با توجه به نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی جدول زیر را کامل کنید.

	۱۳۹۰	مهرماه ۱۳۹۳	دی ماه ۱۳۹۵
هزینه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌ها (برحسب هزار تومان)	۲۱۰	$\frac{۲۱۰ \times ۲۲۵}{۱۰۰} = ۴۷۲/۵۰$	$\frac{۲۱۰ \times ۲۷۰}{۱۰۰} = ۵۶۷$
هزینه کل (برحسب هزار تومان)	۸۵۰	$\frac{۸۵۰ \times ۲۰۲}{۱۰۰} = ۱۷۱۷$	$\frac{۸۵۰ \times ۲۵۳}{۱۰۰} = ۲۱۵۰/۵$

۷ شاخص پوسیدگی دندان ( $DMFT$ ) در ایران برای سال ۱۳۶۰ برابر ۳ بوده است؛ یعنی هر ایرانی، به‌طور متوسط، دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان پوسیده و یک دندان پُر شده است. این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر ۶ شده است. این شاخص را در سال ۱۳۹۵ تفسیر کنید. شاخص در سال ۱۳۹۵ چند درصد افزایش داشته است؟

پاسخ: تفسیر در سال ۱۳۹۵ به‌طور متوسط هر شخص دو دندان کشیده، دو دندان پُر شده و دو دندان پوسیده دارد.

$$100\% = 100\% - \left( \frac{6}{3} \times 100 \right)\%$$

این شاخص در سال ۱۳۶۰ نسبت به سال ۱۳۹۵ چند درصد کاهش داشته است؟

# سری های زمانی

## درس دوم

### اهداف درس دوم

۱ شناخت سری های زمانی

۲ کاربرد آنها در آمار

### مطالبی برای معلم

**موضوع:** چگونه باید انگیزه دانش آموزان را در درس آمار افزایش داد؟

یکی از این روش های محبوب یادگیری برای دانش آموزان، ایجاد انگیزه است. «تجزیه و تحلیل داده»، انگیزه بسیار خوبی برای یادگیری دانش آموزان است.

اگر دانش آموزان «استنباط از داده ها» را یاد بگیرند، پاسخ بسیاری از سؤالات اطراف خودشان را پیدا می کنند. تجزیه و تحلیل و استنباط از داده ها باید به این منجر شود که دانش آموز راه رسیدن به «تصمیم گیری» را بیاموزد؛ بنابراین، یک عنوان بسیار مهیج برای ایجاد انگیزه این است که به دانش آموزان بگوییم آنها می خواهند یاد بگیرند که «چگونه می توان تصمیم گیری درست اقتصادی انجام داد»

البته باید دقت کنیم که این امر به طور غیر مستقیم انجام شود؛ زیرا دانش آموزان در تصمیم گیری علت را نمی خواهند. همچنین باید دقت داشته باشیم حتی آمارگیرها در زندگی خودشان به ندرت از روش های آماری برای تصمیم گیری استفاده می کنند. (برای اثبات باید از یک آماری پرسیم چند بار در زندگی خصوصی، به طور مستقیم، از تجزیه و تحلیل واریانس به منظور تفسیر تصمیم گیری کرده است؟) شاید یکی از عواملی که تصمیم گیری را مشکل می کند پیچیدگی رابطه بین متغیرهاست.

شرکت های بزرگ چگونه تصمیم گیری می کنند؟

به یقین می توان حدس زد که مبنای بسیاری از «تصمیم گیری ها» تجزیه و تحلیل آماری داده هاست.

اصطلاح «تصمیم گیری» تقریباً همیشه فاقد یقین است، و در نتیجه، بهترین وسیله برای تصمیم گیری، استفاده

از اطلاعات حاصل از تجربه یعنی آمار است.

عنوان جذاب دیگری که می‌تواند یادگیری را در دانش‌آموزان بالا ببرد، این است که بگوییم می‌خواهیم «پیش‌بینی کردن» را بیاموزیم. برای نمونه، موضوعات پیش‌بینی می‌تواند موارد زیر باشد:

— متوسط درآمد سالانه در طول چند سال آینده؛

— طول عمر؛

— آیا فردا باران می‌آید؟

در این روند، با این وعده که دانش‌آموزان قرار است یاد بگیرند چگونه پیش‌بینی‌های دقیق داشته باشند، زمینه‌های یادگیری فراهم می‌شود.

اکثر دانش‌آموزان به دانستن اینکه چگونه به درستی می‌توان پیش‌بینی کرد، بسیار علاقه‌مند هستند. ما با استفاده از این علاقه‌مندی می‌خواهیم زمینه‌های یادگیری و درک ماندگار در آمار را برای آنان ایجاد کنیم. بنابراین، ما می‌خواهیم آمار را به عنوان مجموعه‌ای از روش‌ها برای کمک به ایجاد پیش‌بینی‌های دقیق آموزش دهیم.

شکی نیست که ما می‌توانیم این کار را به خوبی انجام دهیم؛ زیرا دانش‌آمار مانند کلیدی است برای رمزگشایی از مجموعه‌ای از پیش‌بینی‌های بهینه.

## روش تدریس

### مجموعه سؤالات آغازین درس (صفحه ۶۳)

در این مجموعه سؤالات بنا داریم تا توجه دانش‌آموزان را به مسئله «پیش‌بینی» و مفید بودن جمع‌آوری مجموعه‌ای از داده‌های آماری در فواصل زمانی مساوی و منظم جلب کنیم. این مجموعه گردآوری شده را «سری زمانی» می‌نامیم. در حقیقت، یک نوع ساده پیش‌بینی در آمار این است که اطلاعات گذشته را اساس کار پیش‌بینی آینده قرار دهیم.

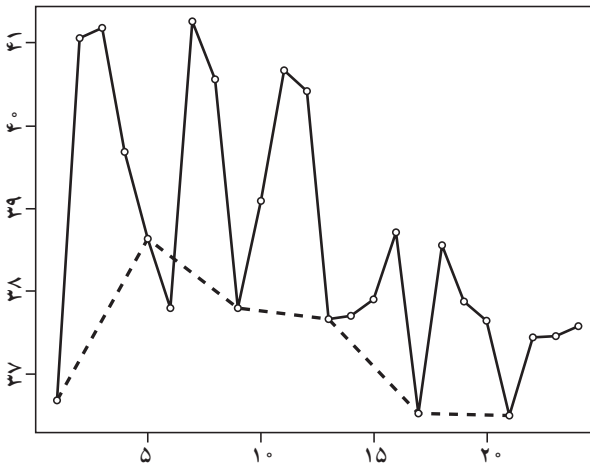
### فعالیت صفحه ۶۳

اولین مرحله در تجزیه و تحلیل سری زمانی، رسم داده‌ها و به دست آوردن آماره‌های نمونه است. در این فعالیت با طرح مسئله میزان بارندگی در شش ماه دوم سال دو شهر آ و ب می‌خواهیم نشان دهیم داده‌های جمع‌آوری شده می‌توانند در توصیف و تشریح اطلاعات ما مفید باشند. به این ترتیب، زمینه تعریف سری زمانی را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کنیم.

دقت داشته باشیم که دانش‌آموز، پس از رسم نمودار پراکنش نگاشت داده‌ها، در مورد دو شهر و توصیف اینکه فصل بیشترین میزان بارندگی در دو شهر متفاوت است، می‌تواند مفید بودن جمع‌آوری داده‌ها

در فواصل زمانی مناسب را درک کند.

### کار در کلاس (صفحه ۶۴)



در این «کار در کلاس» با جمع‌آوری داده مربوط به ۶ روز درجه حرارت بدن یک بیمار و طرح پرسش‌هایی، مفهوم سری زمانی و یکی از کاربردهای آن (توصیف و تشریح اطلاعات گردآوری شده) را مرور می‌کنیم.

دقت داشته باشیم در یکی از قسمت‌های این فعالیت (رسم نمودار فقط برای ساعات ۷ صبح) دانش‌آموز درک می‌کند اگرچه

جمع‌آوری داده‌ها در تعداد بیشتر مفید است، اما گاهی نتیجه‌گیری از روی داده‌های کمتر، بهتر است.

(نمودار برای ۷ صبح بهتر نشان می‌دهد که بیمار پس از روز چهارم، وضعیت رو به بهبود دارد)

تذکر: در سری زمانی، محور افقی مربوط به زمان است. در برگه‌های ثبت دمای بدن بیمار، در هر روز

۴ بار دمای بدن بیمار ثبت می‌شود (هر شش ساعت یک بار)؛ بنابراین، هر یک واحد روی محور افقی، برابر با شش ساعت است.

### فعالیت صفحه ۶۵

کاربرد اصلی تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی، پیش‌بینی است. اگر بین داده‌ها در طول زمان، وابستگی خاصی باشد، فرصت مناسبی پیش می‌آید تا به کمک آن مشاهدات بتوان روند آینده پدیده‌ای را از طریق یافتن الگوی داده‌ها پیش‌بینی کرد. در این فعالیت، هدف ما این است که دانش‌آموز درک کند اگر بتوانیم الگوی داده‌ها را شناسایی کنیم، قادر خواهیم بود پیش‌بینی‌های خوبی از آینده داشته باشیم.

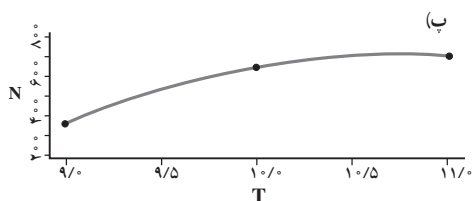
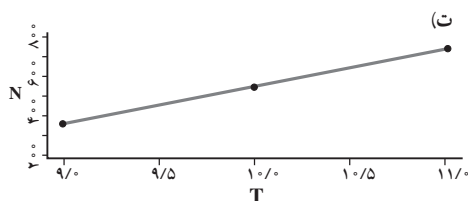
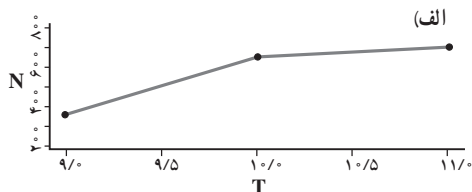
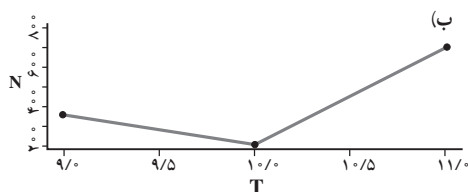
### فعالیت صفحه ۶۶

دانش‌آموزان در این فعالیت با درون‌یابی (تخمین داده‌های بین داده‌های ثبت شده) آشنا می‌شوند.

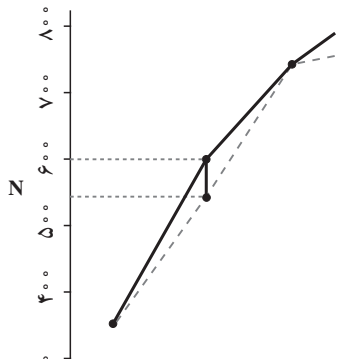
تعداد مشتری‌ها در ساعت‌های فرد ثبت شده است. از دانش‌آموز می‌خواهیم، با توجه به تعداد مشتری‌ها در ساعات ۹ و ۱۱، تعداد مشتری‌ها را در ساعت ۱۰ حدس بزنند.

تغییر تعداد مشتری‌های فروشگاه بین ساعت ۹ تا ۱۱ ممکن است به شکل هریک از ۴ نمودار صفحه بعد صورت بگیرد، اما می‌توانیم نتیجه بگیریم بهترین تصمیم برای تخمین تعداد مشتری‌ها در ساعت ۱۰، استفاده





از نمودار «ت» (تغییر به شکل یکنواخت) است؛ زیرا در این صورت، حتی اگر تعداد مشتری‌ها از الگوی نمودار «ت» تبعیت نکرده باشند، خطای تخمین ما از نمودارهای دیگر احتمالاً کمتر است، به این ترتیب، دانش‌آموز با انجام دادن این فعالیت قادر خواهد بود مفهوم درون‌یابی را درک کند.



در حقیقت تعداد مشتری‌ها نه تنها در ساعات فرد، بلکه در ساعات‌های زوج نیز ثبت شده است. در شکل روبه‌رو، خطای تخمین تعداد مشتری‌ها در ساعت ۱۰ براساس ثبت تعداد مشتری‌ها در ساعات فرد، با پاره خطی نشان داده شده است.

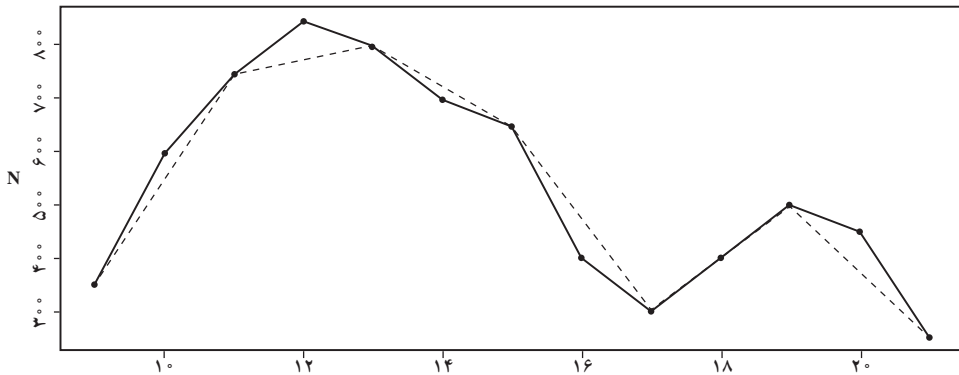
کار در کلاس (صفحه ۶۷)

در این فعالیت، با نوشتن معادله خط، مفهوم درون‌یابی خطی را کامل می‌کنیم.

$$y - ۷۵^\circ = \frac{۷۵^\circ - ۳۵^\circ}{۱۱ - ۹} (x - ۱۱) \Rightarrow y = ۲^\circ x - ۱۴۵^\circ \Rightarrow y = ۵۵^\circ \quad x=۱^\circ$$

بنابراین، خطای تخمین  $|۵۵^\circ - ۶۰^\circ| = ۵^\circ$  است.

برای مشخص کردن خطای تخمین برای نقاط دیگر از روی شکل، می‌توانیم به نمودار زیر مراجعه کنیم.



### فعالیت صفحه ۶۸

مانند فعالیت قبلی، در این فعالیت نیز زمینه تعریف برون‌یابی (تخمین داده‌های بعد یا قبل از داده‌های ثبت‌شده) فراهم می‌شود.

طبیعی است که رفتار قبل و بعد از داده‌های ثبت شده می‌تواند از الگوی داده‌های ثبت شده پیروی نکند، اما درست‌ترین تصمیم می‌تواند این باشد که تصور کنیم در یک بازه زمانی کوتاه مدت، این رفتار همچنان ادامه دارد. اگرچه می‌توانیم برای نقاط بعدی از آخرین باره خط (یا برای نقاط قبلی از اولین باره خط) استفاده کنیم، اما در این فعالیت نشان می‌دهیم خطی که نقطه انتهایی (یا ابتدایی) را به نقطه میانگین داده‌ها وصل می‌کند می‌تواند وسیله دیگری برای برون‌یابی باشد.

با توجه به اینکه (۳, ۱۲) نقطه وسط است، معادله خطی که می‌خواهیم با آن برون‌یابی کنیم:

$$y - 19 = \frac{19 - 12}{5 - 3}(x - 5) \Rightarrow y = 3/5 x + 1/5 \Rightarrow \boxed{y = 22/5} \quad x=6$$

## حل تمرینات برگزیده

۱ کدام یک از داده‌های زیر سری زمانی است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

(الف) تعداد مسافران فرودگاه بوشهر در هر ماه در ۱۰ سال گذشته.

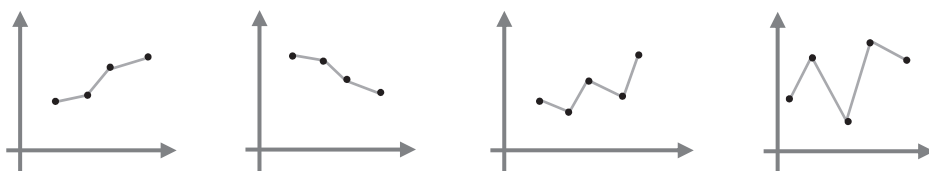
(ب) تعداد مشتریان یک تاجر برحسب مدت زمانی که صرف بازاریابی می‌کند.

(ج) تعداد ساعاتی که در معرض نور مستقیم خورشید قرار داریم (شدت آفتاب سوختگی).

پاسخ: فقط مورد الف، سری زمانی است.

موارد ب و ج سری زمانی نیستند زیرا جمع‌آوری داده‌ها در زمان‌های مساوی و منظم نمی‌باشند.

۲ اگر نمودارهای شکل زیر یک سری زمانی باشند، در کدام حالت درونیابی و برون‌یابی خطی بهتری امکان‌پذیر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



پاسخ: در دو نمودار مشخص شده، داده‌ها یکنواخت‌تر تغییر می‌کنند؛ پس درونیابی و برون‌یابی خطی بهتری صورت می‌گیرد.

۳ یک دکه‌دار تعداد بطری‌های آب فروخته‌شده از شروع فصل گرما را یک روز در میان، مطابق جدول زیر، ثبت کرده است:

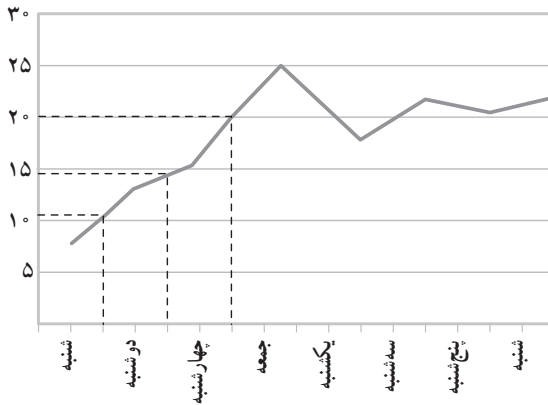
روز	شنبه	دوشنبه	چهارشنبه	جمعه	یکشنبه	سه‌شنبه	پنجشنبه	شنبه
تعداد بطری‌ها	۸	۱۳	۱۶	۲۵	۱۸	۲۲	۲۱	۲۳

(الف) سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

(ب) تعداد بطری‌های فروخته‌شده در روزهای فرد را درونیابی کنید.

(ج) تعداد بطری‌های فروخته‌شده در روز دوشنبه از هفته دوم را برون‌یابی کنید.

تذکر: در قسمت ب، منظور، روزهای فرد هفته (اول) است؛ بنابراین، به ترتیب و با توجه به شکل، در



یکشنبه هفته اول ۱۱، در سه‌شنبه ۱۴ و در پنجشنبه ۲۱ بطری فروخته شده است.

در قسمت ج، هفته دوم به هفته سوم تغییر کند.

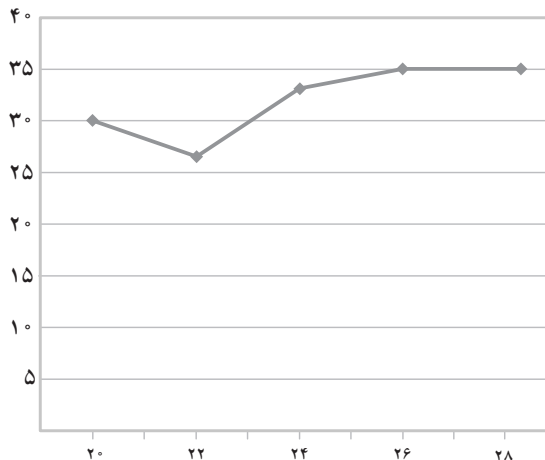
نقطه میانگین (۴/۵، ۱۸/۲۵)

$$y - 23 = \frac{23 - 18/25}{8 - 4/5}(x - 8) \Rightarrow y = \frac{19}{14}x + \frac{85}{7} \quad x=1 \Rightarrow \boxed{y=26}$$

۴ تعداد گل‌های زده شده در لیگ برتر فوتبال جام خلیج فارس در هفته‌های زوج و پایانی در جدول زیر آمده است.

هفته	۲۰	۲۲	۲۴	۲۶	۲۸
تعداد گل‌ها	۳۰	۲۷	۳۲	۳۵	۳۵

سری زمانی مربوط به آن را رسم کنید. تعداد گل‌های هفته ۱۳م را برون‌یابی کنید.



پاسخ:

(نقطه میانگین  $(۲۴, ۳۱/۸)$ )

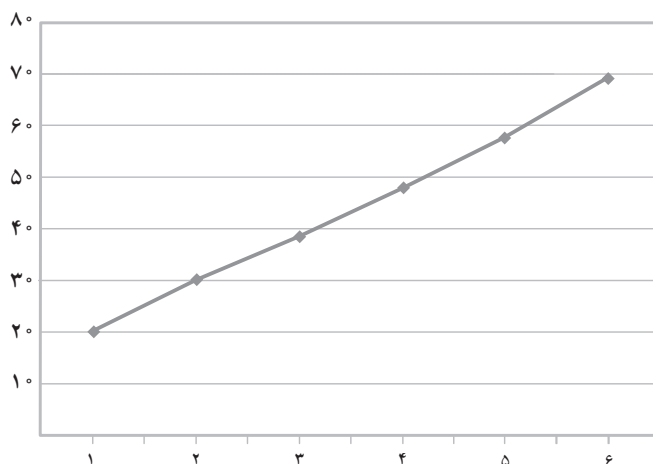
$$y - ۳۵ = \frac{۳۱/۸ - ۳۵}{۲۴ - ۲۸}(x - ۲۸) \Rightarrow y = ۵/۸x + ۱۲/۶ \quad x = ۳۰ \Rightarrow \boxed{y = ۳۷}$$

۵ میانگین افزایش خدمات یک تعمیرگاه نسبت به سال اول (سال پایه) برحسب درصد در جدول زیر آمده است.

سال	۱	۲	۳	۴	۵	۶
درآمد	۱۹/۵	۲۹	۳۸/۵	۴۸	۵۸	۶۷

الف) سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب) درصد افزایش خدمات سال هفتم این تعمیرگاه را نسبت به سال پایه برون‌یابی کنید.

(نقطه میانگین  $(۳/۵, ۴۳/۳)$ )

$$y - ۶۷ = \frac{۶۷ - ۴۳/۳}{۶ - ۳/۵}(x - ۶) \Rightarrow y = \frac{۲۳۷}{۲۵}x + \frac{۲۵۳}{۲۵} \quad x = ۷ \Rightarrow \boxed{y = ۷۶}$$

۶ تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر در جهان مطابق جدول زیر برای ده سال ثبت شده است.

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر	۳۰	۲۸	۲۹	۲۳	۲۰	۱۶	۲۱	۲۵	۱۶	۲۱

الف) سری زمانی آن را رسم کنید.

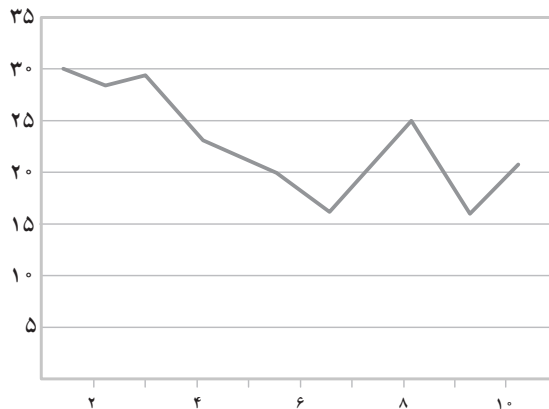
ب) میانگین سال و تعداد زلزله‌ها را به دست آورید.

ج) معادله خطی را که نقطه (۲۲ و ۱۰) را به میانگین سال و تعداد زلزله‌ها وصل می‌کند، به دست آورید.

د) با استفاده از خطی که معادله آن را به دست آورده‌اید، تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر در سال

یازدهم در جهان را برون‌یابی کنید.

هـ) اگر بدانیم در سال یازدهم دقیقاً ۲۵ زلزله آمده است، خطای برون‌یابی چقدر است؟



نقطه میانگین (۵/۵, ۲۰/۸)

$$y - 21 = \frac{21 - 20/8}{10 - 5/5} (x - 10) \Rightarrow y = \frac{2}{1055} x + \frac{4427}{211} \quad x=11 \Rightarrow \boxed{y=21}$$

بنابراین خطای برون‌یابی ۴ است.

۷ نرخ تورم در ایران بین سال‌های ۱۳۱۶ تا ۱۳۹۵ در جدول زیر داده شده است.

سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم
۱۳۱۶	۲۱/۲	۱۳۲۶	۶/۶	۱۳۳۶	۴/۴	۱۳۴۶	۰/۸	۱۳۵۶	۲۵/۱	۱۳۶۶	۲۷/۷	۱۳۷۶	۱۷/۳	۱۳۸۶	۱۸/۴
۱۳۱۷	۸/۸	۱۳۲۷	۱۱/۱	۱۳۳۷	۱/۰	۱۳۴۷	۱/۵	۱۳۵۷	۱۰/۰	۱۳۶۷	۲۸/۹	۱۳۷۷	۱۸/۱	۱۳۸۷	۲۵/۴
۱۳۱۸	۸/۰	۱۳۲۸	۲/۳	۱۳۳۸	۱۳/۰	۱۳۴۸	۳/۶	۱۳۵۸	۱۱/۴	۱۳۶۸	۱۷/۴	۱۳۷۸	۲۰/۱	۱۳۸۸	۱۰/۸
۱۳۱۹	۱۳/۸	۱۳۲۹	-۱۷/۲	۱۳۳۹	۷/۹	۱۳۴۹	۱/۵	۱۳۵۹	۲۳/۵	۱۳۶۹	۹/۰	۱۳۷۹	۱۲/۶	۱۳۸۹	۱۲/۴
۱۳۲۰	۴۹/۵	۱۳۳۰	۸/۳	۱۳۴۰	۱/۶	۱۳۵۰	۵/۵	۱۳۶۰	۲۲/۸	۱۳۷۰	۲۰/۷	۱۳۸۰	۱۱/۴	۱۳۹۰	۲۱/۵
۱۳۲۱	۹۶/۲	۱۳۳۱	۷/۲	۱۳۴۱	۰/۹	۱۳۵۱	۶/۳	۱۳۶۱	۱۹/۲	۱۳۷۱	۲۴/۴	۱۳۸۱	۱۵/۸	۱۳۹۱	۳۰/۵
۱۳۲۲	۱۱۰/۵	۱۳۳۲	۹/۲	۱۳۴۲	۱/۰	۱۳۵۲	۱۱/۲	۱۳۶۲	۱۴/۸	۱۳۷۲	۲۲/۹	۱۳۸۲	۱۵/۶	۱۳۹۲	۳۴/۷
۱۳۲۳	۲/۷	۱۳۳۳	۱۵/۹	۱۳۴۳	۴/۵	۱۳۵۳	۱۵/۵	۱۳۶۳	۱۰/۴	۱۳۷۳	۳۵/۲	۱۳۸۳	۱۵/۲	۱۳۹۳	۱۵/۶
۱۳۲۴	-۱۴/۴	۱۳۳۴	۱/۷	۱۳۴۴	۰/۳	۱۳۵۴	۹/۹	۱۳۶۴	۶/۹	۱۳۷۴	۴۹/۴	۱۳۸۴	۱۰/۴	۱۳۹۴	۱۱/۹
۱۳۲۵	-۱۱/۵	۱۳۳۵	۸/۸	۱۳۴۵	۰/۸	۱۳۵۵	۱۶/۶	۱۳۶۵	۲۳/۷	۱۳۷۵	۲۳/۲	۱۳۸۵	۱۱/۹	۱۳۹۵	۹

الف) نمودار سری زمانی داده‌ها را، ده سال در میان، رسم کنید.

ب) داده‌ها را، با استفاده از قسمت قبل، درونیابی کنید.

ج) بر روی همان سری زمانی، داده‌های پنج سال در میان را با استفاده از جدول به‌روی همان نمودار رسم و خطای درونیابی را محاسبه کنید.

